

Inoffizielle Lösungshinweise: Nachrichtentechnik I Sommersemester 2010

Fabian Roos
studium@froos.de

Dozent: Prof. Friedrich Jondral
Universität Karlsruhe
zuletzt aktualisiert am 30. März 2011

Anmerkungen

Zur Verwendung

Diese Lösungshinweise sollen den Besuch der Übung nicht ersetzen, sondern ergänzen. In einer Übung werden die Aufgaben besprochen, es gibt Erläuterungen zum Rechenweg und es besteht die Möglichkeit zur Nachfrage. Dies alles können und sollen diese Lösungshinweise nicht liefern. Sie sind dagegen zur Ergänzung gedacht, falls eine Übung verpasst wurde und zum Vervollständigen des eigenen Aufschriebs.

Ich arbeite alleine an diesen Hinweisen, Fehler können somit sehr leicht passieren. Falls jemand Fehler findet, würde ich darum bitten mir diese mitzuteilen. Sonstige Rückmeldungen sind ausdrücklich gewünscht.

Die neueste Version der Lösungshinweise findet sich unter <http://www.froos.de/inhalt-kit>.

Danksagung

Für die Erstellung der Grafiken möchte ich mich bei Cornelius und Felix bedanken, ohne deren Mithilfe würde es keine Grafiken geben.

Bei Ferdinand möchte ich mich für das Korrekturlesen und für Tipps zu \LaTeX bedanken. Vielen Dank.

Ebenfalls möchte ich mich jedem bedanken, der mir bis jetzt Fehler in diesen Lösungshinweisen mitgeteilt hat.

Wiederholung wichtiger Definitionen und Begriffe

Definition: Stochastischer Prozess

Ein stochastischer Prozess $X(t, \xi)$ ist eine mit dem Parameter t indizierte Familie von Zufallsvariablen.

[WTJon, Definition 8-1-1, Seite 153.]

Definition: Moment(e) eines stochastischen Prozesses

Das n -te Moment ist definiert durch

$$E\{Y^n(t)\} := \int_{-\infty}^{\infty} y^n f_Y(y, t) dy$$

wobei das erste Moment

$$E\{Y(t)\} := \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y, t) dy$$

als Erwartungswert bzw. zeitabhängiger Mittelwert bezeichnet wird. [SuSKie, Definition 3.45, Seite 68]

Rechenregeln für Erwartungswerte

Es gilt

$$E(\alpha \cdot X + Y) = \alpha \cdot E(X) + E(Y), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

aus [WTKun, Kapitel 6.3, Seite 21]

Korrelation

Die Korrelation ist folgendermaßen definiert

$$\begin{aligned} \varphi_{XY}(t_1, t_2) &:= E\{X(t_1) \cdot Y^*(t_2)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_{t_1} \cdot y_{t_2} \cdot f_{XY}(x_{t_1}, y_{t_2}) dx dy \end{aligned}$$

Für $X = Y$ ist es eine Autokorrelation, für $X \neq Y$ eine Kreuzkorrelation, siehe auch [SuSKie, Definition 3.52, Seite 69] mit etwas anderer Schreibweise.

Falls X und Y unabhängig sind, gilt $f_{XY}(x_{t_1}, y_{t_2}) = f_X(x_{t_1}) \cdot f_Y(y_{t_2})$ (siehe [WTJon, Definition 7.3-1 Seite 111]) und damit

$$\varphi_{XY}(t_1, t_2) = E\{X(t_1)\} \cdot E\{Y^*(t_2)\}$$

Die Autokorrelation ist definiert durch

$$\varphi_{XX}(t_1, t_2) = E\{X(t_1) \cdot X^*(t_2)\}$$

Der Korrelationskoeffizient der Zufallsvariablen X und Y berechnet sich laut [WTKun, Definition 11.7, S. 42] durch

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{D^2(X) \cdot D^2(Y)}} = \frac{E[(X - E(X))(Y - E(Y))]}{\sqrt{D^2(X) \cdot D^2(Y)}}$$

Gilt $\rho(X,Y) = 0$, so heißen X und Y unkorreliert. Wichtig ist, dass wenn X und Y unabhängig sind, sie auch unkorreliert sind. Die Umkehrung ist im Allgemeinen jedoch falsch, siehe [WTKun, Satz 11.8 (a), S. 42].

Schwache Stationarität

Ein Prozess heißt (schwach) stationär, wenn

1. der Erwartungswert $E\{X(t)\}$ konstant ist
2. die Autokorrelationsfunktion nur von der Zeitdifferenz abhängt und nicht vom Zeitpunkt

$$\varphi_{XX}(t_1, t_2) = \varphi_{XX}(t_2 - t_1) = \varphi_{XX}(\tau)$$

[WTKun, Definition 11.9, Seite 43]

Anders formuliert lautet die Schwache Stationarität

Ein stochastischer Prozess heißt schwach stationär oder auch im weiteren Sinne stationär, wenn die Invarianz gegenüber einer Translation der Zeit nur für Momente erster und zweiter Ordnung gilt.

siehe [SuSKie, Definition 3.70, S. 72].

Mittlere Leistung, Leistungsdichtespektrum

Die mittlere Leistung(sdichte) wird definiert durch

$$\bar{P} = \varphi_{XX}(0)$$

und das Leistungsdichtespektrum durch die Fouriertransformierte

$$\Phi_{XX} = \mathcal{F}(\varphi_{XX}(\tau))$$

[WTKun, Definition 11.10, Seite 44]

Logarithmen

Für den Logarithmus zur Basis 2, dem so genannten *logarithmus dualis*, verwende ich die einfachere Schreibweise ld statt der ausführlicheren \log_2 . Ebenfalls für den Logarithmus zur Basis 10, dem so genannten *dekadischen Logarithmus*, schreibe ich lg statt \log_{10} , siehe auch [wiki-log, Abschnitt "Bezeichnungen"].

Die Berechnung mit dem Taschenrechner (der Casio fx-991ES kann den Logarithmus zu verschiedenen Basen berechnen, hier ist keine Umrechnung von Hand nötig) gelingt mit der Basisumrechnung, siehe auch [wiki-log, Abschnitt 'Basisumrechnung']

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Quellencodierung

Transinformation

Die Transinformation ist durch [NTJon, Definition (2.2-3), S. 18]

$$I(x_n; y_m) = \text{ld} \frac{P(x_n|y_m)}{P(x_n)} \text{ bit}$$

gegeben.

Kanalkapazität

Die Kanalkapazität ist durch [NTJon, Gleichung (2.4-3), S. 23]

$$C = \max_{\{P(x_n)\}} I(X; Y)$$

mit der Einheit bit pro Nutzung des Kanals gegeben.

Mittlere Transinformation

Die mittlere Transinformation ist Definiert durch [NTJon, Definition (2.3-1), S. 20]

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M I(x_n; y_m) P(x_n; y_m) \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M P(x_n; y_m) \text{ld} \frac{P(x_n; y_m)}{P(x_n)P(y_m)} \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M P(x_n; y_m) \text{ld} \frac{P(x_n|y_m)}{P(x_n)} \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M P(x_n) \cdot P(y_m|x_n) \cdot \text{ld} \left(\frac{P(y_m|x_n)}{P(y_m)} \right) \end{aligned}$$

Der erste Term - $P(x_n; y_m)$ - lässt sich über den Zusammenhang der bedingten Wahrscheinlichkeit - siehe [WTKun, Bemerkung 4.3 (b) S.9] - umschreiben. Ebenfalls lässt sich der zweite Term laut [NTJon, Bemerkung (ii) S. 18] umschreiben.

$P(y_m)$ lässt sich mit der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit - siehe [WTKun, Satz 4.4 S. 9] - bestimmen. Es gilt

$$P(y_m) = \sum_{n=1}^N P(y_m|x_n) \cdot P(x_n)$$

Für ein Beispiel siehe Aufgabe 7.

Entropie der Quelle

Die Entropie der Quelle ist definiert durch [NTJon, Gleichung (2.1-2), S. 16]

$$H(X) := \sum_{n=1}^N I(x_n)P(x_n) = - \sum_{n=1}^N P(x_n) \text{ld} [P(x_n)]$$

mit der Einheit *bit/Symbol*.

Die Entropie einer Quelle wird maximal, wenn alle Symbole gleichwahrscheinlich sind.

Entscheidungsgehalt einer Quelle

Der Entscheidungsgehalt einer Quelle mit N Zeichen ist durch [NTJon, Gleichung (4-3), S. 36]

$$H_0 = \text{ld } N \text{ bit/Zeichen}$$

gegeben und gibt die maximale Information an.

Mittlere Codewortlänge

Die mittlere Codewortlänge ist gegeben durch [NTJon, Gleichung (4.1), S. 35]

$$L = \sum_{n=1}^N P(x_n)L(x_n)$$

mit der Einheit *bit/Zeichen*.

Redundanz der Quelle

Die Redundanz der Quelle ist durch [NTJon, Gleichung (4.1-3), S. 39]

$$R_Q = H_0 - H(X)$$

gegeben.

Redundanz des Codes

Die Redundanz des Codes ist durch [NTJon, Gleichung (4.1-4), S. 39]

$$R_C = L - H(X)$$

gegeben.

Effizienz des Codes

In der Übung wurde die Definition der Effizienz eines Codes eingeführt, die sich anscheinend nicht im Buch findet.

$$\eta := \frac{H(x)}{L} \leq 1$$

Bandbreiteneffizienz

Die Bandbreiteneffizienz oder auch spektrale Effizienz genannt ist durch [NTJon, Gleichung (10.4-2), S. 120]

$$\Gamma = \frac{R}{W} = \text{ld}(M)$$

gegeben, wobei R die Bitübertragungsrate, W die Systembandbreite und M die Anzahl der Symbole ist.

Coderate

Die Definition findet sich auf [NTJon, S. 57]

$$R = \frac{k}{n}$$

wobei k die Datenbits und n die Codebits sind.

Blockcodes

Folgende Eigenschaften kann ein Blockcode besitzen, dies muss aber nicht zwingend der Fall sein.

- (I) **linear**: Ein Blockcode ist genau dann *linear*, wenn die Summe zweier Codewörter wieder ein Codewort ergibt.
- (II) **systematisch**: Ein Blockcode ist genau dann *systematisch*, wenn jedes Codewort (n Bit lang) mit k Infobits beginnt (das Datenwort) und $(n - k)$ -Paritycheckbits angehängt sind. Siehe dazu auch [NTJon, S. 49].

Die Codegeneratormatrix \overline{G} hat die Form, siehe [NTJon, Gleichung 5.2-2, S. 49]

$$\overline{G} = \left[\overline{I}_k \overline{P} \right]$$

Zur Dimension der Matrix

$$k \times n = \left[\begin{array}{cc} k & n-k \\ k & n-k \end{array} \right]$$

- (III) **zyklisch**: Ein Blockcode ist genau dann *zyklisch*, wenn jede zyklische Verschiebung eines Codewortes wieder ein Codewort ergibt. Der Vorteil von Zyklischen Codewörtern ist, dass sie sich durch Schieberegister erzeugen lassen. Siehe dazu auch [NTJon, Kapitel 5.3 S. 51].

Beispiel: $\vec{c} = (c_1 \ c_2 \ c_3)^\top$ ist ein Codewort, dann ist auch $\vec{c} = (c_2 \ c_3 \ c_1)^\top$ ein Codewort.

Syndromdecodierung

Es wird das Wort \vec{r} empfangen und daraus mit [NTJon, Gleichung 5.2-7]

$$\vec{s}^\top = \vec{r}^\top \overline{H}^\top$$

das Syndrom \vec{s} berechnet. Ist $\vec{s} \neq \vec{0}$, so liegt ein Übertragungsfehler vor. Ist dieser korrigierbar, so entspricht das Syndrom einer Spalte von \overline{H} , welche für das fehlerhafte Bit verantwortlich ist. Ist es die dritte Spalte, so ist das dritte Bit falsch.

Hammingungleichung, -abstand

Die [NTJon, Hammingungleichung 5.2-8, S. 51] lautet

$$2^{n-k} \geq \sum_{i=0}^t \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^t \frac{n!}{(n-i)! \cdot i!}$$

wobei t die Anzahl korrigierbarer Fehler darstellt. Die obere Grenze der Ungleichung wird nur für gute Codes maximal.

Für den Hammingabstand mit t Bitfehler gilt [NTJon, Gleichung 5.2-4, S. 50]

$$d_{min} \geq 2t + 1$$

Generatorpolynom, gültige Codewörter

Es gilt der [NTJon, Satz, S. 53]

Das Generatorpolynom $g(x)$ erzeugt genau dann einen zyklischen (n, k) -Code, wenn es Teiler von $x^n + 1$ ist.

Ein (n, k) -Code hat k Datenbits und damit 2^k gültige Codewörter.

Der Grad des Generatorpolynoms ist laut [NTJon, Punkt 2, S. 53]

$$\text{grad}[g(x)] = n - k$$

Soll überprüft werden, ob ein Codewort gültig ist, so kann dieses als Polynom geschrieben werden. Ist dieses ohne Rest durch das Generatorpolynom teilbar, ist es gültig, siehe auch [NTJon, Gleichung 5.3-8, S. 54].

Huffman-Verfahren

Vorgehensweise zur Bildung des Binärbaums nach dem Huffman-Verfahren, vergleiche dazu auch [NTJon, S. 39].

- (I) Anordnen der Zeichen nach der Größe ihrer Auftretenswahrscheinlichkeit, beginnend mit der größten Wahrscheinlichkeit.

- (II) Anschließend werden immer zwei Paare mit der kleinsten Auftretenswahrscheinlichkeit zusammen gefasst.

Für ein Beispiel siehe Aufgabe 9.

GF2

In $GF2$ entspricht ein Plus einem Minus, zudem gilt $x^n + x^n = 0$, dies macht die folgende Tabelle deutlich.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

Tabelle 1: Addition in GF2.

Die Rechnung entspricht einer Kombination aus einer normalen Addition und einem anschließendem Modulo 2.

Vielfache von Bit

Für Vielfache der Einheit Bit wird in der Vorlesung *Nachrichtentechnik* mit den SI-Präfixe und nicht mit den Binärpräfixe gearbeitet. Somit gilt $2 \text{ MBit/s} = 2 \cdot 10^6 \text{ Bit}$. Möchte man mit dem bekannten 'Faktor' 1024 arbeiten, müsste die Einheit zum Beispiel Kibibit lauten. Weitere Informationen im Artikel [wiki-bit, zum Begriff Bit].

Übungsblatt 1

Aufgabe 1

- a) Laut [WTKun, Kapitel 11.12, Seite 44] ist weißes Rauschen Normalverteilt und es gilt für die Normalverteilung

$$f_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma}} \cdot \exp\left(\frac{-(n - \mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right)$$

zudem ist das Rauschen Mittelwertfrei, das heißt es ist $\mu = 0$.

$$f_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma}} \cdot \exp\left(\frac{-n^2}{2 \cdot \sigma^2}\right)$$

- b) Das Leistungsdichtespektrum bei weißem reellen Rauschen ist konstant über alle Frequenzen [WTKun, Kapitel 11.12, Seite 44].

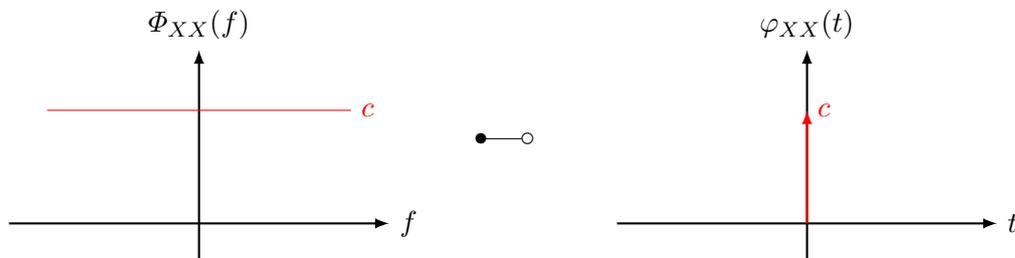


Abbildung 1: Weißes Rauschen, links Frequenzspektrum, rechts Zeitbereich

Es ist $\Phi_{XX} = \frac{N_0}{2}$, wobei N_0 die Rauschleistungsdichte ist. Bei komplexem Rauschen beträgt die Konstante N_0 . Die zugehörige Autokorrelationsfunktion ist ein Dirac-Impuls der selben Höhe, siehe Abbildung 1

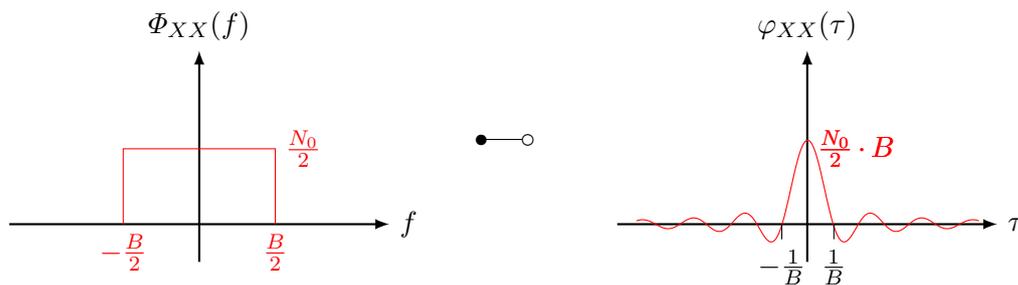


Abbildung 2: Weißes Rauschen bandbegrenzt, links Frequenzspektrum, rechts Zeitbereich

Handelt es sich um ein bandbegrenztes Rauschen, wie in Abbildung 2, so gilt

$$\Phi_{XX}(f) = \begin{cases} \frac{N_0}{2}, & \text{für } |f| \leq \frac{B}{2}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Daraus lässt sich durch Transformation die Autokorrelationsfunktion berechnen (Korrespondenztabelle)

$$\varphi_{XX}(\tau) = \frac{N_0}{2} \cdot B \cdot \text{si}(\pi \cdot B \cdot \tau)$$

Aufgabe 2

Damit $X(t, \xi)$ stationär genau ist, muss der Erwartungswert $E\{X\}$ konstant und die Autokorrelationsfunktion nur von der Zeitdifferenz τ abhängig sein. Nun werden die beiden Voraussetzungen nachgerechnet.

Für den Erwartungswert gilt

$$E\{X(t, \xi)\} = E\{A(\xi) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + B(\xi) \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)\}$$

Mit den Rechenregeln für den Erwartungswert lässt sich das noch umformen. Die Trigonometrischen Terme sind wie eine Konstante zu betrachten und können herausgezogen werden. Da $E\{A\} = 0$ und $E\{B\} = 0$ ist der ganze Term Null und damit konstant.

$$E\{X(t, \xi)\} = E\{A(\xi)\} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + E\{B(\xi)\} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) = 0$$

Damit wäre die erste Bedingung erfüllt, nun wird die Autokorrelationsfunktion bestimmt. Für die weiteren Umformungen ist es leichter, wenn bereits zu Beginn mit den Zeitpunkten t und $t + \tau$ gerechnet wird.

$$\varphi_{XX}(t, t + \tau) = E\{X(t) \cdot X(t + \tau)\}$$

$$\begin{aligned} &= E\{[A(\xi) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + B(\xi) \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)] \cdot [A(\xi) \cdot \cos(\omega_0 \cdot (t + \tau)) + B(\xi) \cdot \sin(\omega_0 \cdot (t + \tau))]\} \\ &= E\{A^2(\xi) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot (t + \tau)) + A(\xi) \cdot B(\xi) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot \sin(\omega_0 \cdot (t + \tau)) \\ &\quad + A(\xi) \cdot B(\xi) \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot (t + \tau)) + B^2(\xi) \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \cdot \sin(\omega_0 \cdot (t + \tau))\} \end{aligned}$$

Mit den Rechenregeln für Erwartungswerte lässt sich das wieder auseinander ziehen, zudem gilt bei unabhängigen Zufallsvariablen noch $E\{A \cdot B\} = E\{A\} \cdot E\{B\}$, was in diesem Fall Null ist. Somit ergibt sich

$$= E\{A^2(\xi)\} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot (t + \tau)) + E\{B^2(\xi)\} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \cdot \sin(\omega_0 \cdot (t + \tau))$$

Dies lässt sich mit den Additionstheoremen

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \cdot [\cos(x - y) + \cos(x + y)]$$

und

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} \cdot [\cos(x - y) - \cos(x + y)]$$

noch umformen zu

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \cdot E\{A^2(\xi)\} \cdot [\cos(\omega_0 \cdot \tau) + \cos(2 \cdot t + \tau)] + \frac{1}{2} \cdot E\{B^2(\xi)\} \cdot [\cos(\omega_0 \cdot \tau) - \cos(2 \cdot t + \tau)] \\ &= \frac{1}{2} \cdot [E\{A^2(\xi)\} + E\{B^2(\xi)\}] \cdot \cos(\omega_0 \cdot \tau) + \frac{1}{2} \cdot [E\{A^2(\xi)\} - E\{B^2(\xi)\}] \cdot \cos(2 \cdot t + \tau) \end{aligned}$$

Laut Aufgabenstellung gilt $E\{A^2(\xi)\} = E\{B^2(\xi)\}$ und der letzte Term verschwindet. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \varphi_{XX}(t, t + \tau) &= \frac{1}{2} \cdot [E\{A^2(\xi)\} + E\{B^2(\xi)\}] \cdot \cos(\omega_0 \cdot \tau) \\ &= E\{A^2(\xi)\} \cdot \cos(\omega_0 \cdot \tau) \\ &= \varphi_{XX}(\tau) \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass $X(t, \xi)$ stationär genau ist.

In der Übung hatte der Cosinus-Term ein Minuszeichen im Argument. Da der Cosinus eine gerade Funktion ist, gilt: $\cos -x = \cos x$ und das Ergebnis stimmt überein. In meinem Rechenweg habe ich die Additionstheoreme anders angewandt, also die Bedeutung von x und y vertauscht.

Aufgabe 3

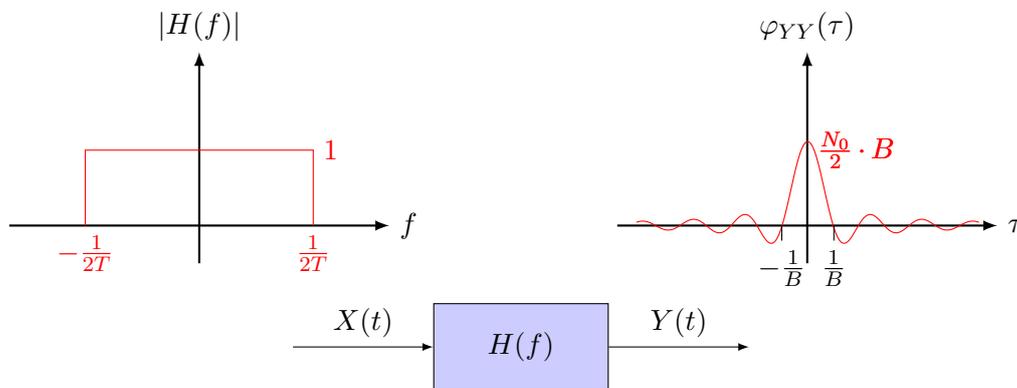


Abbildung 3: Frequenzspektrum des Tiefpasses $H(f)$ links, φ_{YY} rechts, Blockschaltbild unten

a) $H(f)$ des Tiefpasses aus Abbildung 3 lautet

$$H(f) = \begin{cases} 1, & \text{für } |f| \leq \frac{1}{2 \cdot T}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Wie auch bereits in Aufgabe 1b handelt es sich um weißes Rauschen und es gilt $\Phi_{XX}(f) = \frac{N_0}{2}$.

Mit dem [NTJon, Zusammenhang (1.4-4) auf Seite 9] $\Phi_{YY}(f) = \Phi_{XX}(f) \cdot |H(f)|^2$ lässt sich durch Transformation φ_{YY} (siehe auch Abbildung 3) bestimmen (Korrespondenztabelle)

$$\varphi_{YY} = \frac{N_0}{2} \cdot B \cdot \text{si}(\pi \cdot B \cdot \tau)$$

b) Wenn die Abtastwerte unkorreliert sein sollen, dann muss der Korrelationskoeffizient $\rho(X, Y) = 0$ sein laut [WTKun, Definition 11.7 Seite 42]. Für den Korrelationskoeffizient gilt

$$\rho(X, Y) = \frac{E\{(X - E\{X\}) \cdot (Y - E\{Y\})\}}{\sqrt{D^2(X) \cdot D^2(Y)}}$$

Der Erwartungswert einer Normalverteilung ist laut [WTKun, Bemerkung von 8.10 Seite 34] μ . Ein reeler weißer Gaußprozess ist wie bereits in Aufgabe 1 gesehen, mittelwertfrei, das heißt $\mu = 0$. Damit ergibt sich

$$\rho(X, Y) = \frac{E\{(X - \mu_x) \cdot (Y - \mu_y)\}}{\sqrt{D^2(X) \cdot D^2(Y)}} = \frac{E\{X \cdot Y\}}{\sqrt{D^2(X) \cdot D^2(Y)}} = \frac{\varphi_{YY}(\tau)}{\sqrt{D^2(X) \cdot D^2(Y)}} \stackrel{!}{=} 0$$

Wobei für das vorletzte Gleichheitszeichen noch zu beachten ist, dass es hier keine zwei verschiedenen Zufallsvariablen sind, sondern die beiden identischen, jedoch zu unterschiedlichen Zeitpunkten: $Y(t)$ und $Y(t + \tau)$.

Damit gilt für die Abtastzeit T_A

$$\varphi_{YY}(\tau) = \frac{N_0}{2} \cdot B \cdot \text{si}(\pi \cdot B \cdot \tau) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \pi \cdot B \cdot k \cdot T_A = k \cdot \pi \Leftrightarrow T_A = \frac{1}{B}$$

für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Aufgabe 4

a) Laut [WTJon, Gleichung 7.1-7, Seite 106] gilt

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sqrt{1 - \rho^2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2 \cdot (1 - \rho^2)} \cdot \left[\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 2 \cdot \rho \cdot \frac{(x_1 - \mu_1) \cdot (x_2 - \mu_2)}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} \right] \right\}$$

- b) Da X_1 und X_2 unkorreliert sind, gilt laut [WTKun, Definition 11.7 Seite 42] wie bereits in der vorigen Aufgabe $\rho = 0$. Damit vereinfacht sich die Dichtefunktion zu

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_1} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \cdot \frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} \right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_2} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \cdot \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right\} \\ &= f(x_1) \cdot f(x_2) \end{aligned}$$

Damit sind sie statistisch unabhängig, siehe auch [WTJon, Definition 7.3-1 Seite 111].

Allgemein gilt: X, Y unabhängig $\Rightarrow X, Y$ unkorreliert, die Umkehrung ' \Leftarrow ' stimmt meistens nicht, siehe [WTKun, Satz 11.8(a) Seite 42].

Aufgabe 5

- a) Für den [NTJon, Zusammenhang (1.4-4) auf Seite 9] $\Phi_{YY}(f) = \Phi_{XX}(f) \cdot |H(f)|^2$ muss noch die Übertragungsfunktion $H(f)$ berechnet werden.

$$H(f) = \frac{Y(t)}{X(t)} = \frac{\frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}}{\frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} + R} = \frac{1}{1 + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot C \cdot R}$$

Das Betragsquadrat ist

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + (2 \cdot \pi \cdot f \cdot R \cdot C)^2}$$

da

$$\left| \frac{1}{a + ib} \right| = \left| \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \right| = \sqrt{\left(\frac{a}{a^2 + b^2} \right)^2 + \left(\frac{b}{a^2 + b^2} \right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

gilt.

Mit der Korrespondenz

$$\varphi_{XX}(\tau) = \sigma^2 \cdot \delta(\tau) \circ \bullet \Phi_{XX}(f) = \sigma^2$$

ergibt sich für das Leistungsdichtespektrum $\Phi_{YY}(f)$

$$\Phi_{YY}(f) = \frac{\sigma^2}{1 + 4 \cdot \pi^2 \cdot f^2 \cdot R^2 \cdot C^2}$$

- b) Zur Bestimmung der Autokorrelationsfunktion $\varphi_{YY}(\tau)$ muss $\Phi_{YY}(f)$ transformiert werden, dazu wird geschickt umgeformt und die Korrespondenztabelle benutzt. Es gilt

$$e^{-a|t|} \circ \bullet \frac{2 \cdot a}{a^2 + (2 \cdot \pi \cdot f)^2}$$

Umformung von $\Phi_{YY}(f)$

$$\Phi_{YY}(f) = \frac{2 \cdot \frac{1}{R \cdot C}}{\left(\frac{1}{R \cdot C}\right)^2 + (2 \cdot \pi \cdot f)^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{(R \cdot C)^2} \cdot \frac{R \cdot C}{2} \cdot \sigma^2}_{\frac{\sigma^2}{2 \cdot R \cdot C}}$$

transformiert

$$\varphi_{YY}(\tau) = \frac{\sigma^2}{2 \cdot R \cdot C} \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot |\tau|}$$

Bestimmung der mittleren Leistung(sdichte)

$$E\{Y^2(t)\} = E\{Y(t) \cdot \underbrace{Y(t + \tau)}_{\text{mit } \tau=0}\} = \varphi_{YY}(\tau = 0) = \frac{\sigma^2}{2 \cdot R \cdot C}$$

Übungsblatt 2

Aufgabe 6

- a) Mit der Korrespondenz für den Sinus (siehe zum Beispiel [NTJon, Anhang A Seite 221] und

$$e^{-a \cdot t^2} \circ \bullet \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-\frac{(\pi \cdot f)^2}{a}}$$

lässt sich $H(f)$ berechnen

$$\begin{aligned} H(f) &= \mathcal{F} \left\{ e^{-\pi \cdot (f_0 \cdot t)^2} \right\} * \mathcal{F} \left\{ \sin(40\pi \cdot f_0 \cdot t) - \sin(36\pi \cdot f_0 \cdot t) \right\} \\ &= \frac{1}{f_0} \cdot e^{-\pi \cdot \left(\frac{f}{f_0}\right)^2} * \frac{j}{2} \cdot [\delta(f + 20 \cdot f_0) - \delta(f - 20 \cdot f_0) - \delta(f + 18 \cdot f_0) + \delta(f - 18 \cdot f_0)] \\ &= \frac{j}{2 \cdot f_0} \left[e^{-\pi \cdot \left(\frac{f+20 \cdot f_0}{f_0}\right)^2} - e^{-\pi \cdot \left(\frac{f-20 \cdot f_0}{f_0}\right)^2} - e^{-\pi \cdot \left(\frac{f+18 \cdot f_0}{f_0}\right)^2} + e^{-\pi \cdot \left(\frac{f-18 \cdot f_0}{f_0}\right)^2} \right] \end{aligned}$$

Anmerkung: Man geht davon aus, dass f_0 positiv ist, deswegen wird der Betrag nicht benötigt, der durch $\sqrt{\frac{1}{f_0^2}}$ entstehen würde.

Das Betragsspektrum $|H(f)|$ ist in Abbildung 4 auf Seite 17 zu sehen. Wie sich das Betragsspektrum genau zusammensetzt, ist in Abbildung 5 auf Seite 18 genau zu sehen, denn hier wurde $H(f)$ gezeichnet.

- b) Gleichsetzen von $h(t)$ mit der [NTJon, Gleichung (1.1-2) S. 2]

$$h(t) \stackrel{!}{=} s(t) = a(t) \cdot \cos[2 \cdot \pi \cdot f_T t + \vartheta(t)]$$

liefert mit dem Additionstheorem

$$\sin x - \sin y = 2 \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

angewandt auf $\sin(40\pi \cdot f_0 \cdot t) - \sin(36\pi \cdot f_0 \cdot t)$

$$s(t) \stackrel{!}{=} e^{-\pi \cdot (f_0 \cdot t)^2} \cdot 2 \cdot \sin(2\pi \cdot f_0 \cdot t) \cdot \cos(2\pi \cdot 19 \cdot f_0 \cdot t + 0)$$

Die komplexe Einhüllende ist laut [NTJon, Gleichung (1.1-4) S. 3] definiert durch

$$u(t) = a(t) \cdot e^{j \cdot \vartheta(t)}$$

Damit lässt sich leicht ablesen

$$s(t) \stackrel{!}{=} \underbrace{e^{-\pi \cdot (f_0 \cdot t)^2} \cdot 2 \cdot \sin(2\pi \cdot f_0 \cdot t)}_{u(t)=a(t)} \cdot \cos(2\pi \cdot 19 \cdot f_0 \cdot t + 0)$$

und $\vartheta(t) = 0$ und für die Trägerfrequenz $f_T = 19 \cdot f_0$.

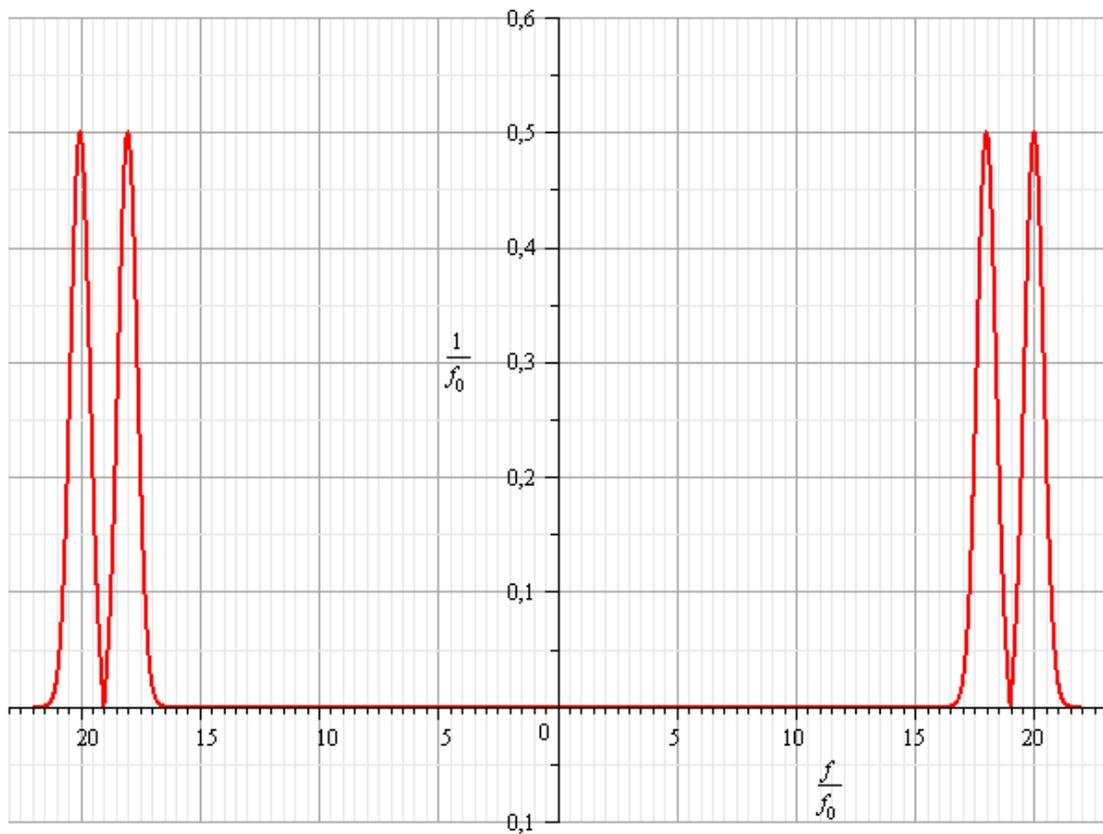


Abbildung 4: Betragsspektrum $|H(f)|$ der Aufgabe 6a)

c) Mit der [NTJon, Gleichung (1.2-3) S. 5] lässt sich $c(t)$ berechnen

$$\begin{aligned}
 h(t) &= 2 \cdot \operatorname{Re} \left\{ c(t) \cdot e^{j \cdot 2\pi f_T t} \right\} = 2 \cdot \operatorname{Re} \left\{ [c_R(t) + j c_I(t)] \cdot [\cos(2\pi f_T t) + j \sin(2\pi f_T t)] \right\} \\
 &= 2 \cdot \operatorname{Re} \left\{ c_R(t) \cdot \cos(2\pi f_T t) + j c_r(t) \cdot \sin(2\pi f_T t) + j c_I(t) \cdot \cos(2\pi f_T t) - c_I(t) \sin(2\pi f_T t) \right\} \\
 &= 2 \cdot \{ c_R(t) \cdot \cos(2\pi f_T t) - c_I(t) \sin(2\pi f_T t) \} \\
 &= 2 \cdot c_R(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_T \cdot t) \\
 &\stackrel{!}{=} e^{-\pi \cdot (f_0 \cdot t)^2} \cdot 2 \cdot \sin(2\pi \cdot f_0 \cdot t) \cdot \cos(2\pi \cdot f_T \cdot t)
 \end{aligned}$$

wobei der Zusammenhang für die Trägerfrequenz $f_T = 19 \cdot f_0$ aus b) verwendet wurde. Da es sich um ein reelles Signal handelt, gilt $c_I(t) = 0$. Damit ergibt sich für $c(t)$

$$c(t) = e^{-\pi \cdot (f_0 \cdot t)^2} \cdot \sin(2\pi \cdot f_0 \cdot t)$$

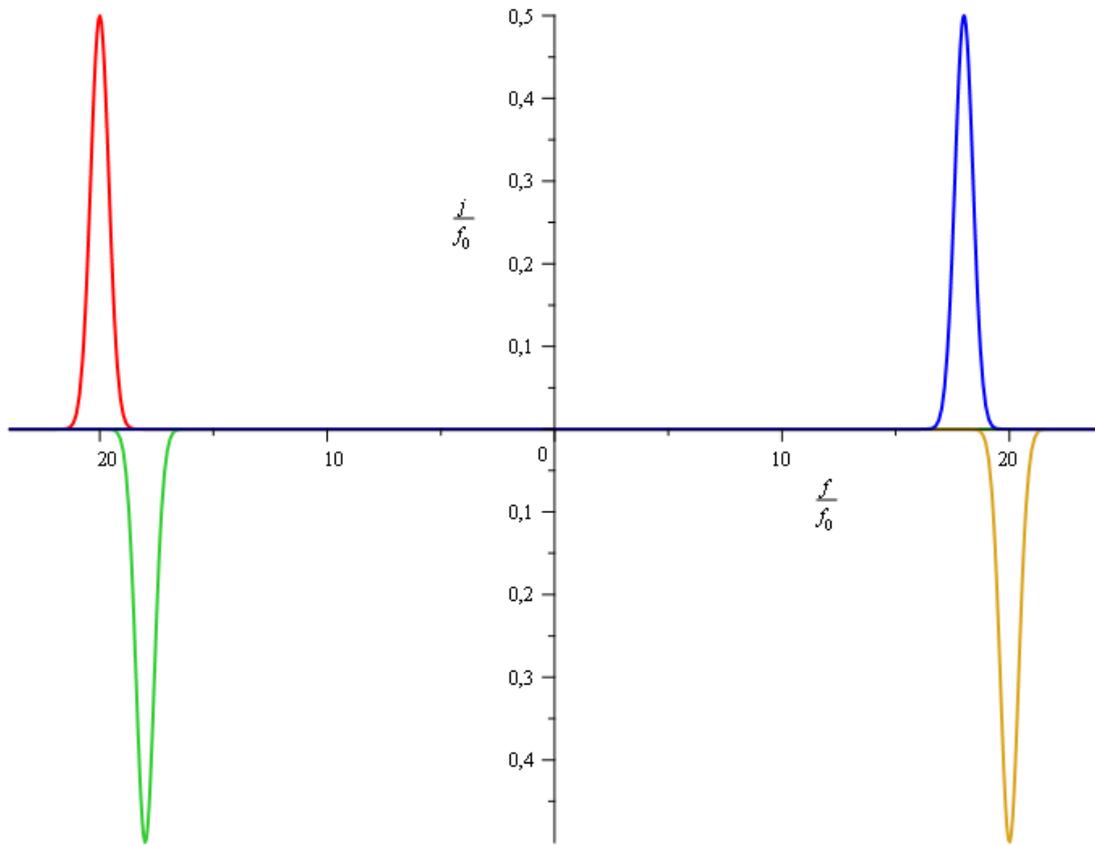


Abbildung 5: $H(f)$ der Aufgabe 6a)

d) Um die Übertragungsfunktion zu skizzieren wird $c(t)$ transformiert

$$\begin{aligned}
 C(f) &= \mathcal{F} \left\{ e^{-\pi \cdot (f_0 \cdot t)^2} \right\} * \mathcal{F} \left\{ \sin(2\pi \cdot f_0 \cdot t) \right\} \\
 &= \frac{1}{f_0} \cdot e^{-\pi \cdot \left(\frac{f}{f_0}\right)^2} * \frac{j}{2} \cdot [\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)] \\
 &= \frac{j}{2 \cdot f_0} \left[e^{-\pi \cdot \left(\frac{f+f_0}{f_0}\right)^2} - e^{-\pi \cdot \left(\frac{f-f_0}{f_0}\right)^2} \right]
 \end{aligned}$$

Das Spektrum ist in Abbildung 6 auf Seite 19 zu sehen.

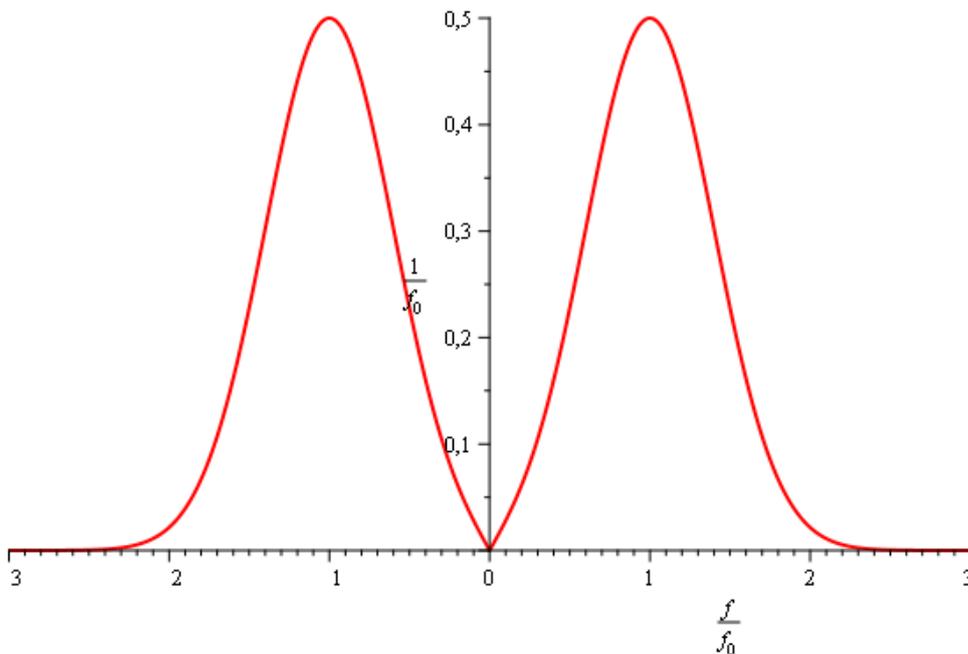


Abbildung 6: Übertragungsfunktion $|C(f)|$ der Aufgabe 6d)

Aufgabe 7

- a) Laut [NTJon, Definition (2.1-2) S. 16] gilt für die Entropie der Quelle

$$\begin{aligned}
 H(X) &= - \sum_{n=1}^N P(x_n) \cdot \text{ld} P(x_n) \\
 &= -0,4 \cdot \text{ld}(0,4) - 0,3 \cdot \text{ld}(0,3) - 0,3 \cdot \text{ld}(0,3) \\
 &\approx 1,57 \text{ bit/Symbol}
 \end{aligned}$$

- b) Für die mittlere Transinformation gilt laut [NTJon, Definition (2.3-1) S.20]

$$I(X; Y) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M P(x_n; y_m) \cdot \text{ld} \left(\frac{P(x_n|y_m)}{P(x_n)} \right)$$

Der erste Term - $P(x_n; y_m)$ - lässt sich über den Zusammenhang der bedingten Wahrscheinlichkeit - siehe [WTKun, Bemerkung 4.3 (b) S.9] - umschreiben. Ebenfalls lässt sich der zweite Term laut [NTJon, Bemerkung (ii) S. 18] umschreiben, sodass sich folgendes ergibt

$$I(X; Y) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M P(x_n) \cdot P(y_m|x_n) \cdot \text{ld} \left(\frac{P(y_m|x_n)}{P(y_m)} \right)$$

Die Wahrscheinlichkeiten $P(x_n)$ und $P(y_m|x_n)$ sind in der Tabelle und durch die Grafik in der Aufgabenstellung gegeben. $P(y_m|x_n)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass am Ausgang m gemessen wird, unter der Bedingung, dass n am Eingang vorliegt. $P(y_m)$ lässt sich mit der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit - siehe [WTKun, Satz 4.4 S. 9] - bestimmen. Es gilt

$$P(y_m) = \sum_{n=1}^3 P(y_m|x_n) \cdot P(x_n)$$

$$P(y_1) = 0,9 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 0,3 = 0,39$$

$$P(y_2) = 0,1 \cdot 0,4 + 0,8 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,3 = 0,31$$

$$P(y_3) = 0,1 \cdot 0,3 + 0,9 \cdot 0,3 = 0,30$$

Damit sind nun alle benötigten Wahrscheinlichkeiten komplett und es lässt sich die Transinformation berechnen

$$I(X; Y) = \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 P(x_n) \cdot P(y_m|x_n) \cdot \text{ld} \left(\frac{P(y_m|x_n)}{P(y_m)} \right)$$

$$I(X; Y) = 0,4 \cdot 0,9 \cdot \text{ld} \left(\frac{0,9}{0,39} \right) + 0,3 \cdot 0,1 \cdot \text{ld} \left(\frac{0,1}{0,39} \right) + 0 \quad m = 1$$

$$+ 0,4 \cdot 0,1 \cdot \text{ld} \left(\frac{0,1}{0,31} \right) + 0,3 \cdot 0,8 \cdot \text{ld} \left(\frac{0,8}{0,31} \right) + 0,3 \cdot 0,1 \cdot \text{ld} \left(\frac{0,1}{0,31} \right) \quad m = 2$$

$$+ 0 \quad + 0,3 \cdot 0,1 \cdot \text{ld} \left(\frac{0,1}{0,30} \right) + 0,3 \cdot 0,9 \cdot \text{ld} \left(\frac{0,9}{0,30} \right) \quad m = 3$$

$$\approx 0,9698 \text{ bit/Symbol}$$

Aufgabe 8

Ein symmetrischer Kanal kann durch seine Übergangsmatrix beschrieben werden

$$\overline{P}(Y|X) = \begin{bmatrix} P(y_1|x_1) & \cdots & P(y_m|x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P(y_1|x_n) & \cdots & P(y_m|x_n) \end{bmatrix}$$

Bei dieser Aufgabe würde die Matrix so aussehen

$$\overline{P}(Y|X) = \begin{bmatrix} P(y_1|x_1) & P(y_2|x_1) & P(y_3|x_1) & P(y_4|x_1) \\ P(y_1|x_2) & P(y_2|x_2) & P(y_3|x_2) & P(y_4|x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Ein Kanal ist genau dann symmetrisch, wenn alle Zeilen Permutationen von einander sind. Gleiches muss für die Spalten gelten.

Bei einem symmetrischen Kanal ergibt sich eine maximale Transinformation bei einer Gleichverteilung der Eingangssymbole, somit gilt $P(x_1) = P(x_2) = 0,5$.

Die Kanalkapazität berechnet sich laut [NTJon, Definition (2.4-3) S. 23] zu

$$C = \max_{\{P(x_n)\}} I(X; Y)$$

mit der [NTJon, Definition (2.3-1) S. 20] für die Transinformation ergibt sich mit den bereits aus Aufgabe 7b) bekannten Umformungen

$$C = I(X; Y) = \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^4 P(x_n) \cdot P(y_m|x_n) \cdot \text{ld} \left(\frac{P(y_m|x_n)}{P(y_m)} \right)$$

Mit der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit - siehe [WTKun, Satz 4.4 S. 9] - lässt sich $P(y_m)$ bestimmen

$$P(y_m) = \sum_{n=1}^3 P(y_m|x_n) \cdot P(x_n)$$

$$P(y_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(y_2) = P(y_3) = P(y_4)$$

Da ein symmetrischer Kanal vorliegt, vereinfacht sich die Berechnung der Transformation und damit der Kanalkapazität

$$C = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \text{ld} \left(\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \text{ld} \left(\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} \right) \right] \cdot 4 \approx 0,0817 \text{ bit/Symbol}$$

Aufgabe 9

- a) Vorgehensweise zur Bildung des Binärbaums nach dem Huffman-Verfahren, vergleiche dazu auch [NTJon, S. 39].
- (I) Anordnen der Zeichen nach der Größe ihrer Auftretenswahrscheinlichkeit, beginnend mit der größten Wahrscheinlichkeit.
 - (II) Anschließend werden immer zwei Paare mit der kleinsten Auftretenswahrscheinlichkeit zusammen gefasst.

Der fertige Binärbaum ist in Abbildung 7 auf Seite 22 zu finden.

Wichtig: Das Huffman-Verfahren ist nicht eindeutig. Treten wie in dieser Aufgabe zwei zu codierende Wörter mit der selben Wahrscheinlichkeit auf, so können diese in der Anordnung vertauscht werden. Ebenfalls kann man den oberen oder den unteren Ast des Baums mit einer 1 oder einer 0 versehen.

- b) Ablesen aus dem Binärbaum liefert die Codierung, siehe Tabelle 2 auf Seite 23.
- c) Die Redundanz berechnet sich laut [NTJon, Gleichung (4.1-4), S. 39] durch

$$R_C = L - H(X)$$

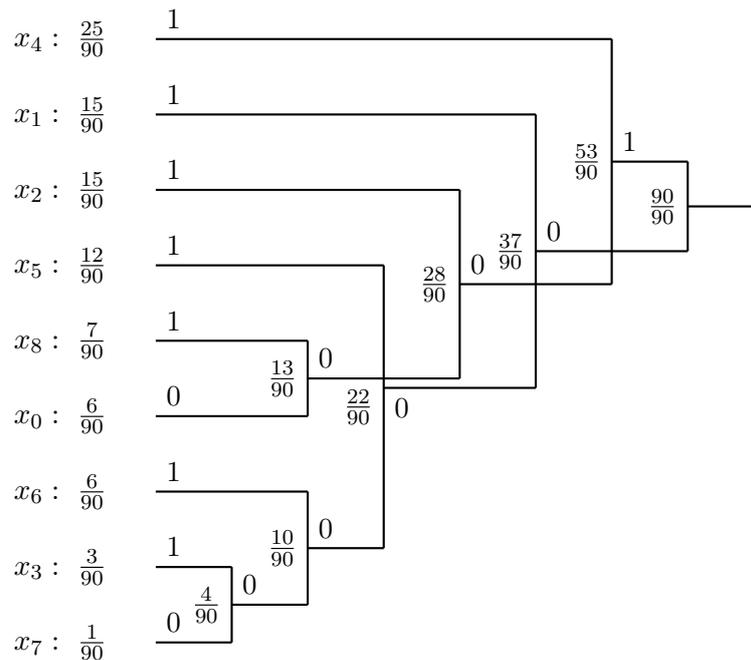


Abbildung 7: Binärbaum nach Huffman-Verfahren

Zuerst wird die mittlere Codewortlänge nach [NTJon, Gleichung (4-1), S. 35] berechnet

$$L = \sum_{n=1}^N P(x_n) \cdot L(x_n) = \dots = \frac{257}{90} \text{ bit/Symbol} \approx 2,86 \text{ bit/Symbol}$$

anschließend wird die Entropie der Quelle nach [NTJon, Definition (2.1-2) S. 16] berechnet

$$H(X) = - \sum_{n=1}^N P(x_n) \cdot \text{ld} P(x_n) = \dots \approx 2,80576 \text{ bit/Symbol}$$

Daraus folgt für die Redundanz

$$R_C \approx 0,05 \text{ bit/Symbol}$$

Zusätzlich wurde noch die Effizienz des Codes, die durch

$$\eta = \frac{H(x)}{L} \leq 1$$

definiert ist, berechnet. In dieser Aufgabe gilt: $\eta \approx 0,9810$

\mathcal{A}	CW	$L(x_i)$
x_0	1000	4
x_1	01	2
x_2	101	3
x_3	00001	5
x_4	11	2
x_5	001	3
x_6	0001	4
x_7	00000	5
x_8	1001	4

Tabelle 2: Alphabet \mathcal{A} , zugehörige Codewörter und Codewortlängen.

Aufgabe 10

Das Empfangssignal $r(t)$ ist allgemein durch [NTJon, Gleichung 3.2-3, S. 27]

$$r(t) = A \cdot e^{j2\pi(f_T + \frac{v}{\lambda} \cdot \cos \Theta)t}$$

gegeben, wobei die Dopplerverschiebung [NTJon, Gleichung 3.2-4, S. 27] $\Delta f_D = \frac{v}{\lambda} \cdot \cos \Theta$ bereits eingesetzt wurde.

Das Empfangssignal setzt sich aus dem Hauptfunkstrahl ohne Dämpfung ($A = 1$) und mit $\Theta = 0$ und dem Mehrwegepfad zusammen.

$$\begin{aligned} r(t) &= e^{j2\pi(f_0 + \frac{v}{\lambda})t} + A \cdot e^{j2\pi(f_0 + \frac{v}{\lambda} \cdot \cos \Theta)t} \\ &= e^{j2\pi f_0 t} \left(e^{j2\pi \frac{v}{\lambda} t} + A \cdot e^{j2\pi \frac{v}{\lambda} \cdot \cos(\Theta)t} \right) \end{aligned}$$

Nun muss der Betrag davon gebildet werden. Der Betrag der vorderen e -Funktion ist 1, für die weitere Berechnung wird mit dem Betragsquadrat gerechnet, um sich lange Wurzelzeichen zu sparen.

$$\begin{aligned} |r(t)|^2 &= \operatorname{Re}^2(r(t)) + \operatorname{Im}^2(r(t)) \\ &= \left[\cos\left(2\pi \frac{v}{\lambda} t\right) + A \cdot \cos\left(2\pi \frac{v}{\lambda} \cdot \cos(\Theta)t\right) \right]^2 + \left[\sin\left(2\pi \frac{v}{\lambda} t\right) + A \cdot \sin\left(2\pi \frac{v}{\lambda} \cdot \cos(\Theta)t\right) \right]^2 \\ &= \cos^2\left(2\pi \frac{v}{\lambda} t\right) + 2 \cdot A \cdot \cos\left(2\pi \frac{v}{\lambda} t\right) \cdot \cos\left(2\pi \frac{v}{\lambda} \cdot \cos(\Theta)t\right) + A^2 \cdot \cos^2\left(2\pi \frac{v}{\lambda} \cdot \cos(\Theta)t\right) \\ &\quad + \sin^2\left(2\pi \frac{v}{\lambda} t\right) + 2 \cdot A \cdot \sin\left(2\pi \frac{v}{\lambda} t\right) \cdot \sin\left(2\pi \frac{v}{\lambda} \cdot \cos(\Theta)t\right) + A^2 \cdot \sin^2\left(2\pi \frac{v}{\lambda} \cdot \cos(\Theta)t\right) \end{aligned}$$

Mit $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ vereinfacht sich das zu

$$|r(t)|^2 = 1 + A^2 + 2 \cdot A \cdot \left[\sin\left(2\pi \frac{v}{\lambda} t\right) \cdot \sin\left(2\pi \frac{v}{\lambda} \cdot \cos(\Theta)t\right) + \cos\left(2\pi \frac{v}{\lambda} t\right) \cdot \cos\left(2\pi \frac{v}{\lambda} \cdot \cos(\Theta)t\right) \right]$$

Mit den Additionstheoremen

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \cdot [\cos(x - y) + \cos(x + y)]$$

und

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} \cdot [\cos(x - y) - \cos(x + y)]$$

folgt daraus

$$\begin{aligned} |r(t)|^2 &= 1 + A^2 + 2 \cdot A \cdot \cos \left[2\pi \frac{v}{\lambda} t - 2\pi \frac{v}{\lambda} \cdot \cos(\Theta) t \right] \\ &= 1 + A^2 + 2 \cdot A \cdot \cos \left[2\pi \frac{v}{\lambda} t (1 - \cos(\Theta)) \right] \end{aligned}$$

Mit den in der Aufgabe gegebenen Werten $A = 0,5$, $\Theta = 45^\circ$ ($\cos \Theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$) ergibt sich

$$|r(t)|_{\Theta=45^\circ} = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \cos \left[2\pi \frac{v}{\lambda} t \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]} = \sqrt{\frac{5}{4} + \cos \left[2\pi \frac{v}{\lambda} t \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]}$$

Der Verlauf des Empfangspegels ist in Abbildung 8 auf Seite 24 zu sehen.

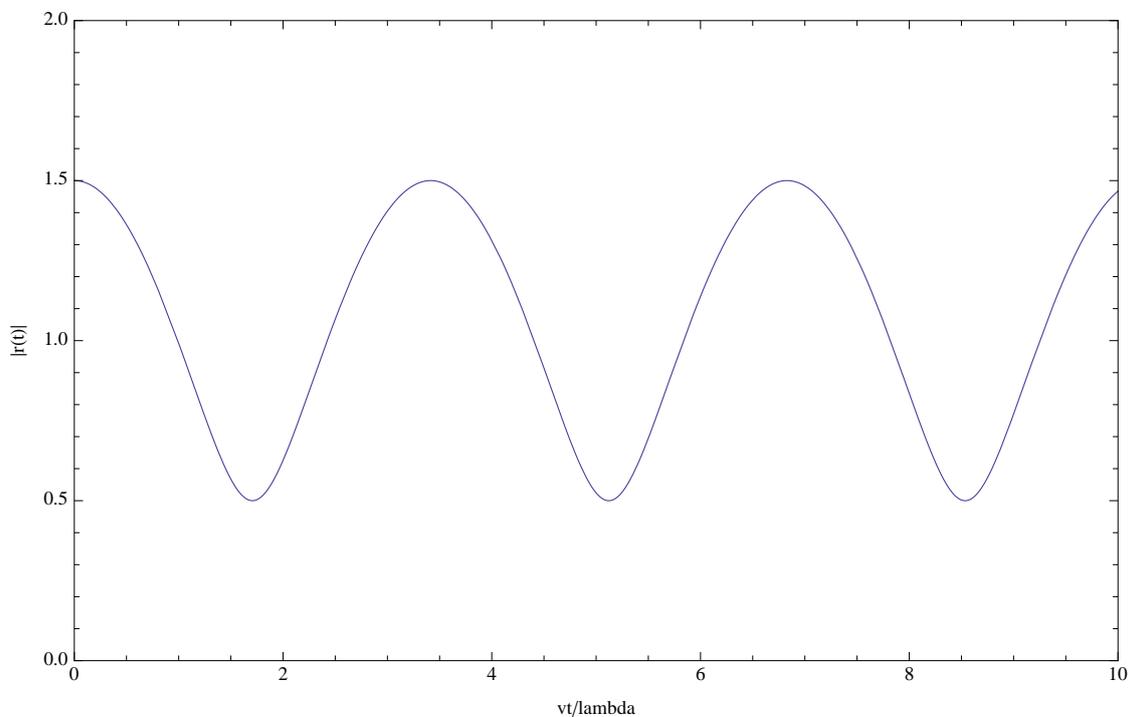


Abbildung 8: Verlauf des Empfangspegels mit den angegebenen Werten

Übungsblatt 3

Aufgabe 11

Die Wiederholung der Eigenschaften von Blockcodes aus der Übung findet sich im ersten Teil dieses Dokuments bei der Wiederholung.

- a) Für diesen Aufgabenteil wird angenommen, dass ein linearer Code vorliegt (siehe Wiederholung).

Da ein linearer Code vorliegt, so ist es für die Berechnung des minimalen Hammingabstandes d_{min} nicht nötig, alle Codewörter untereinander zu vergleichen. Es reicht, wenn diese mit dem Nullwort verglichen werden.

Die Codewörter berechnen sich mit [NTJon, Gleichung 5.2-1, S. 49]

$$\vec{c}^T = \vec{d}^T \overline{G}$$

Damit ergibt sich Tabelle 3, aus der sich der minimale Hammingabstand ablesen

\vec{d}^T	$\vec{c}^T = \vec{d}^T \overline{G}$	$w_H = d(\vec{c}_k, \vec{0})$
000	000 000	-
001	001 011	3
010	010 110	3
011	011 101	4
100	100 101	3
101	101 110	4
110	110 011	4
111	111 000	3

Tabelle 3: Datenwort, zugehöriges Codewort und Hammingabstand zum Nullwort.

lässt: $d_{min} = 3$.

Zur Berechnung der Fehlerkorrekturfähigkeit t wird [NTJon, Gleichung 5.2-4, S. 50] verwendet.

$$d_{min} \geq 2t + 1$$

Umformen nach t liefert

$$2t \leq d_{min} - 1 \rightarrow t \leq \frac{1}{2} \cdot (d_{min} - 1) = \frac{1}{2} \cdot (3 - 1) = 1$$

(t muss eine ganze Zahl sein)

Die Paritycheckmatrix ist laut [NTJon, Gleichung 5.2-5, S. 50] definiert als

$$\overline{H} = \left[\overline{P}^T \overline{I}_{(n-k)} \right]$$

\overline{P} lässt sich aus der Generatormatrix \overline{G} ablesen, da [NTJon, 5.2-2, S. 49] gilt

$$\overline{G} = \begin{bmatrix} \overline{I}_k & \overline{P} \end{bmatrix}$$

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Damit folgt

$$\overline{H} = \begin{bmatrix} \overline{P}^\top & \overline{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Berechnung des Syndroms \vec{s} nach [NTJon, Gleichung 5.2-7 S. 50]

$$\vec{s}^\top = \vec{r}^\top \overline{H}^\top = (011\ 110) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (011)$$

Dies ist die dritte Spalte der Paritycheckmatrix \overline{H} , somit ist das dritte Bit falsch und das gesendete Codewort muss richtig $\vec{c}^\top = (010\ 110)$ heißen, was als Datenwort $\vec{d}^\top = (010)$ ergibt.

c) Wortfehlerwahrscheinlichkeit für **uncodierte** Übertragung:

Ein Wort ist 3 Bit lang und bereits falsch, wenn mindestens eins dieser Bits falsch ist. Damit lässt sich die Wahrscheinlichkeit auf zwei Wege berechnen.

(I) Über das Gegenereignis, dass alle 3 Bits richtig sind

$$P_{\text{uncodiert}} = 1 - (1 - p)^3 \approx 2,997 \cdot 10^{-3}$$

(II) Mit der [NTJon, Formel für die Restfehlerwahrscheinlichkeit 5.1-2, S. 48]

$$P_{\text{uncodiert}} = \sum_{i=1}^3 \binom{3}{i} \cdot p^i \cdot (1 - p)^{3-i}$$

$$= \dots = 3 \cdot p \cdot (1 - p)^2 + 3 \cdot p^2 \cdot (1 - p) + p^3 \approx 2,997 \cdot 10^{-3}$$

Wortfehlerwahrscheinlichkeit für **codierte** Übertragung:

Ein Bitfehler kann korrigiert werden, das Wort ist somit bei mindestens 2 von 6 Bits falsch. Es ergeben sich wieder zwei Möglichkeiten die Wahrscheinlichkeit zu berechnen.

(I) Über das Gegenereignis, dass 6 und 5 Bits richtig sind

$$P_{\text{codiert}} = 1 - (1 - p)^6 - 6 \cdot p \cdot (1 - p)^5 \approx 1,496 \cdot 10^{-5}$$

Anmerkung: Der Faktor 6 ist nötig, da nicht bekannt ist welches der Bits falsch ist.

(II) Mit der Formel für die Restfehlerwahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P_{\text{codiert}} &= \sum_{i=2}^6 \binom{6}{i} \cdot p^i \cdot (1 - p)^{6-i} \\ &= \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot p^2 \cdot (1 - p)^4 + \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot p^3 \cdot (1 - p)^3 + \frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot p^4 \cdot (1 - p)^2 \\ &\quad + \frac{6!}{1! \cdot 5!} \cdot p^5 \cdot (1 - p)^1 + \frac{6!}{0! \cdot 6!} \cdot p^6 \cdot (1 - p)^0 \\ &\approx 1,496 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

Anmerkung: Die Summe beginnt bei der codierten Übertragung bei $i = 2$, da ein Bitfehler korrigierbar ist. In der Formel lautet der Index $i = t + 1$.

d) Zur Abschätzung der Bitfehlerwahrscheinlichkeit P_B werden zwei Aussagen betrachtet

(I) Ist ein Codewort fehlerhaft übertragen worden, dann müssen nicht alle übertragenen Bits falsch sein. Das liefert die Abschätzung nach oben.

$$P_B \leq P_{\text{codiert}}$$

(II) Wenn 1 Bit im Datenwort falsch ist, dann muss ein Wortfehler vorliegen. Analog zum Aufgabenteil c) im Fall der uncodierten Übertragung.

$$\begin{aligned} P_{\text{codiert}} &= \sum_{i=1}^3 \binom{3}{i} \cdot P_B^i \cdot (1 - P_B)^{3-i} = 1 - (1 - P_B)^3 \\ &= \dots = 3 \cdot P_B + P_B^3 - 3 \cdot P_B^2 = 3 \cdot P_B + \underbrace{P_B^2 \cdot (P_B - 3)}_{\leq 0, \text{ da } 0 \leq P_B \leq 1} \\ &\leq 3 \cdot P_B \end{aligned}$$

Dies führt zu

$$P_B \geq \frac{1}{3} \cdot P_{\text{codiert}}$$

Aus (I) und (II) folgt

$$\frac{1}{3} \cdot P_{\text{codiert}} \leq P_B \leq P_{\text{codiert}}$$

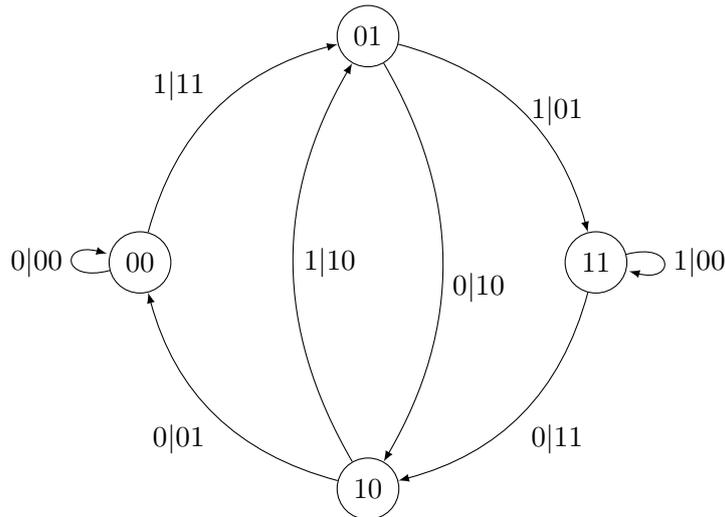


Abbildung 9: Zustandsdiagramm des Faltungscoders

Aufgabe 12

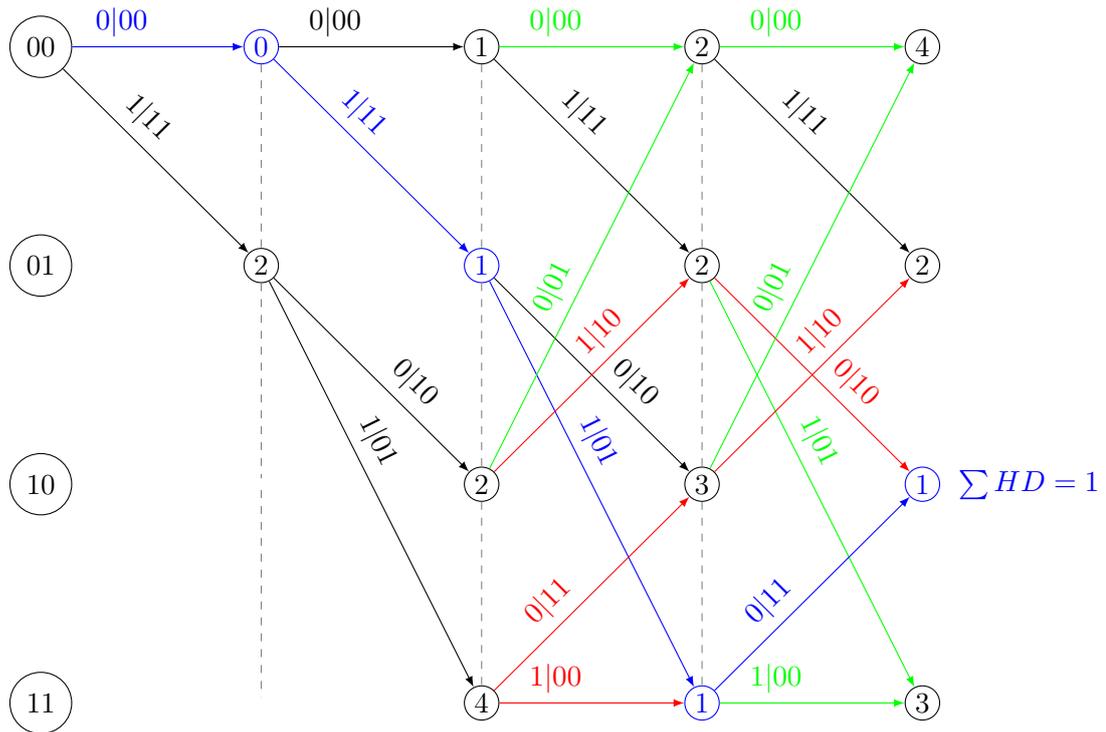
- a) Das Zustandsdiagramm des Faltungscoders ist in Abbildung 9 auf Seite 28 zu sehen.

Zur Schreibweise:

An den Pfeilen steht links das gesendete Datenbit und rechts - getrennt durch einen vertikalen Strich - die vom aktuellen Zustand abhängigen Codebits.

- b) Zunächst wird ein Trellisdiagramm gezeichnet, [NTJon, vgl. Bild 6.1-3, S. 60]. Anschließend wird vom Startzustand 00 nach jedem Takt die Bitfolge des Pfades mit der empfangenen Bitfolge verglichen. Für jeden Zustand wird dann der Weg dorthin ausgewertet und der minimale Hammingabstand notiert. Pfade, die zu einem größeren Hammingabstand führen, werden verworfen - hier sind sie rot markiert. Jeder Zustand kann - vor allem in den späteren Taktschritten - von mehr als einem Vorgängerzustand aus erreicht werden. Liefert ein Pfad zum nächsten Zustand einen höheren Hammingabstand als ein anderer Pfad, so ist dieser unwahrscheinlich und wird - wie bereits erwähnt - verworfen. Falls zwei gleichwertige Pfade gefunden werden, so müssen diese entweder beide weiter verfolgt werden, oder man muss sich für einen Pfad entscheiden. Dies ist in der Aufgabe auch der Fall, die gleichwertigen Pfade sind grün markiert. Da jedoch die jeweiligen Pfade eine hohe Hammingdistanz haben, müssen sie sowieso nicht beachtet werden. Nach dem letzten Takt wird der Zustand betrachtet, der den minimalen Hammingabstand besitzt und von dort wird der Pfad zum Ausgang zurückverfolgt, jeweils über Zwischenzustände mit jeweils minimalem Hammingabstand.

Schließlich lässt sich an dem Pfad das gesendete Datenbit ablesen.



Takt:	1	2	3	4
Empfangen:	00	10	01	11
Korrekt:	00	11	01	11

Abbildung 10: Trellisdiagramm, Pfad mit minimalem Hammingabstand ist blau eingefärbt.

Das Trellisdiagramm für diese Aufgabe ist in Abbildung 10 auf Seite 29 zu sehen. Nach dem letzten Takt besitzt der Zustand 10 den minimalen Hammingabstand 1, von dort aus wird der Pfad zum Startzustand zurückverfolgt, was zum blauen Pfad führt.

Ablesen des Datenbits ergibt: 0110

Anmerkung: Es müssen natürlich nicht alle Pfade eingezeichnet werden, sollte klar sein, dass ab einem Taktschritt aus keine Verbesserung mehr möglich ist, so können die restlichen Pfade weggelassen werden.

Aufgabe 13

- a) Zu den Rechenregeln der GF2 siehe auch die Wiederholung am Anfang des Dokuments. Durch Ausmultiplizieren der Klammer folgt

$$\begin{aligned}
 x^7 - 1 &= (x + 1)(x^3 + x^2 + 1)(x^3 + x + 1) \\
 &= (x^4 + \cancel{x^3} + x + \cancel{x^2} + x^2 + 1)(x^3 + x + 1) \\
 &= (x^4 + x^2 + x + 1)(x^3 + x + 1) \\
 &= x^7 + \cancel{x^6} + \cancel{x^5} + \cancel{x^4} + \cancel{x^3} + \cancel{x^2} + \cancel{x} + \cancel{1} + \cancel{x^4} + \cancel{x^3} + \cancel{x^2} + \cancel{x} + 1 \\
 &= x^7 - 1 = x^7 + 1
 \end{aligned}$$

Dass die beiden kubischen Polynome irreduzibel sind, wird dadurch gezeigt, dass einmal eine 0 und einmal eine 1 eingesetzt wird. Das Ergebnis sollte dann jeweils ungleich 0 sein.

irreduzibel:	$x^3 + x^2 + 1 \stackrel{!}{=} 1$	$x^3 + x + 1 \stackrel{!}{=} 1$
$x = 0 \rightarrow$	$1 \stackrel{!}{=} 1$	$1 \stackrel{!}{=} 1$
$x = 1 \rightarrow$	$1 + 1 + 1 \stackrel{!}{=} 1$	$1 + 1 + 1 \stackrel{!}{=} 1$

Anmerkung:

Polynome vom Grad 2 und Grad 3 sind genau dann irreduzibel, wenn sie keine Nullstellen besitzen. Für einen Grad ≥ 4 muss dies nicht gelten. Für nähere Informationen siehe [GkGo, die Bemerkungen, S. 16]

- b) Nach dem [NTJon, Satz, S. 53] muss gezeigt werden, dass $g(x)$ ein Teiler von $x^n + 1$ ist. Da ein (7,3)-Code vorliegt, ist $n = 7$. Durch Polynomdivision folgt

$$(x^7 + 1) : (x^4 + x^2 + x + 1) = x^3 + x + 1$$

Hierbei müssen wieder die Rechenregeln beachtet werden.

- c) Der zugehörige Encoder ist in Abbildung 11 auf Seite 31 zu sehen. Zum Zeichnen ist es ganz hilfreich, wenn das Generatorpolynom in folgender Form notiert wird

$$g(x) = x^4 + x^2 + x + 1 = x^4 + g_1x^3 + g_2x^2 + g_3x + 1$$

Für ein besseres Verständnis sind die einzelnen Elemente des Schieberegisters entsprechend eingefärbt.

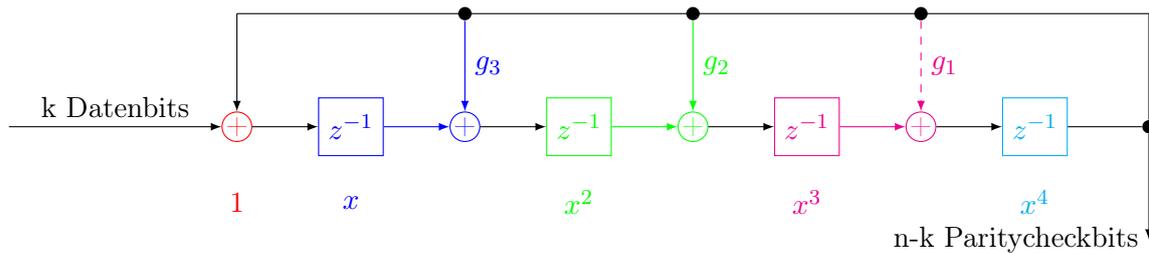


Abbildung 11: Encoder zum Generatorpolynom $g(x)$.

Übungblatt 4

Aufgabe 14

- a) Die komplexe Einhüllende des Signals lässt sich recht leicht ablesen und angeben, wenn die allgemeine Form eines Signals nach [NTJon, Gleichung (1.1-1), S. 2]

$$s(t) = a(t) \cdot \cos [2\pi f_T t + \vartheta(t)]$$

mit dem Bandpasssignal der Aufgabenstellung

$$s(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cdot \cos [2\pi f_T t + X(t = nT)]$$

verglichen wird, denn die komplexe Einhüllende ist nach [NTJon, Gleichung (1.1-4), S. 3] durch

$$u(t) = a(t) \cdot e^{j\vartheta(t)}$$

gegeben. Damit ist die komplexe Einhüllende

$$u(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cdot e^{jX(t=nT)} = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cdot e^{jX(nT)}$$

- b) Mit

$$u(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cdot e^{jX(nT)} = A \cdot e^{j\frac{2\pi m}{M}}$$

und der Bedingung für $m = 0, \dots, M - 1$ lassen sich entweder direkt die Signalraumdiagramme für $M = 2$ und $M = 4$ aufstellen oder man geht den Weg über die Tabelle 4 auf Seite 32.

Damit ergeben sich die beiden Diagramme, zu sehen in Abbildung 12 auf Seite 32.

- c) Der zu berechnende Abstand d ist bereits in Abbildung 12 auf Seite 32 in jedes Diagramm eingezeichnet. Bei $M = 2$ beträgt er $d = 2A = 2 \cdot \sqrt{\frac{2E}{T}}$ und bei $M = 4$ beträgt er $d = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{2E}{T}}$.

	$M = 2$	$M = 4$
m	$A \cdot e^{j\pi m}$	$A \cdot e^{j\frac{\pi}{2}m}$
0	A	A
1	$A \cdot e^{j\pi} = -A$	$A \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = jA$
2	-	$A \cdot e^{j\pi} = -A$
3	-	$A \cdot e^{j\frac{3}{2}\pi} = -jA$

Tabelle 4: Wertetabelle zur Erstellung der Signalraumdiagramme.

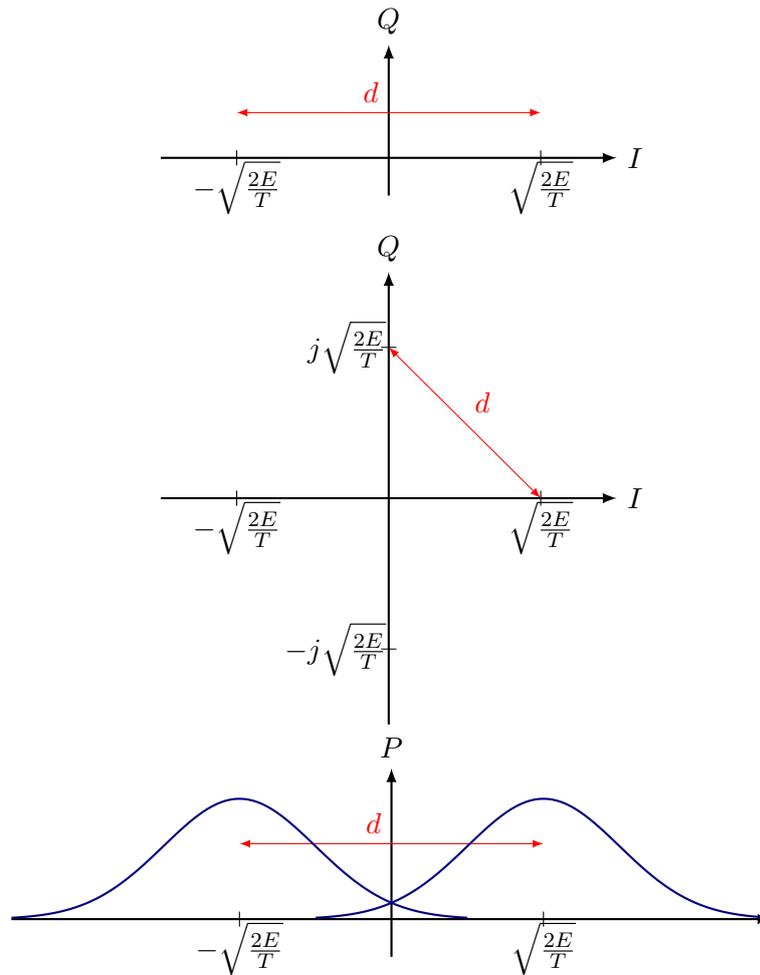


Abbildung 12: Signalraumdiagramme für $M = 2$ (oben, entspricht einer BPSK) und $M = 4$ (Mitte, entspricht einer QPSK) samt Abstand zwischen benachbarter Signalvektoren. Unten sind die gaußverteilten Dichtefunktionen samt Schnittpunkt für die einzelnen Symbole zu sehen.

Der Abstand d ist ein Maß für die Störfestigkeit des Modulationsverfahrens. Allgemein gilt: Je größer d , desto kleiner die Fehlerwahrscheinlichkeit.

Für eine minimal Symbolfehlerrate wird die Entscheidungsgrenze an den Schnittpunkt der beiden Dichtefunktionen gelegt. Sind die Symbole - wie in der Aufgabe - gleichwahrscheinlich, dann ist dies die Mitte (vgl. [NTJon, S. 102]).

Aufgabe 15

a) Die Angabe

$$\text{Var} \{ \text{Re} \{ N_l \} \} = \text{Var} \{ \text{Im} \{ N_l \} \}, l \in \mathbb{Z}$$

bedeutet, dass die Rauschleistung auf der reellen und der imaginären Achse identisch ist. Pro Achse beträgt sie - siehe auch Abbildung 2 auf Seite 10 - $\frac{N_0}{2} \cdot B$, somit ist die gesamte Rauschleistung $\sigma^2 = N_0 \cdot B$. Das Signal-zu-Rausch-Verhältnis SNR_{bit} ist unter anderem auch auf eine Bandbreite von $B = 1$ Hz normiert - siehe [NTJon, Anhang B, S. 223] -, somit ist die bisherige Betrachtung vor allem für das bessere Verständnis erfolgt.

Für die Berechnung von SNR_{bit} wird die *Bitenergie* benötigt, berechnet wird jedoch zuerst die *Symbolenergie*. **Wichtig** ist, dass *Bitenergie* und *Symbolenergie* nicht identisch sind.

Die *Symbolenergie* lässt sich mit der Einhüllenden $u(t)$ berechnen, die Symboldauer beiträgt T .

$$u_1(t) = A \text{ bzw. } u_0(t) = -A$$

Damit ergibt sich mit [NTJon, Gleichung (1.1-8), S. 4]

$$E_s = \int_0^T s^2(t) dt = \frac{1}{2} \cdot \int_0^T |u(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \cdot A^2 \cdot T$$

Für die BPSK folgt aus $1 \frac{\text{bit}}{\text{Symbol}}$, dass die Symbol- und Bitenergie identisch ist. $E_s = E_b = \frac{1}{2} \cdot A^2 \cdot T$. Damit gilt mit [NTJon, Gleichung (B-2), S. 223]

$$SNR_{bit} = \frac{E_b}{N_0} = \frac{A^2 \cdot T}{2N_0}$$

Bei der QPSK gilt $2 \frac{\text{bit}}{\text{Symbol}}$, somit ist $E_s = 2E_b \rightarrow E_b = \frac{1}{2} \cdot E_s = \frac{1}{4} \cdot A^2 \cdot T$

$$SNR_{bit} = \frac{E_b}{N_0} = \frac{A^2 \cdot T}{4N_0}$$

Die Veränderung wird nun durch

$$L = \frac{SNR_{bit}(QPSK)}{SNR_{bit}(BPSK)} = \frac{A^2 \cdot T}{4N_0} \cdot \frac{2N_0}{A^2 \cdot T} = \frac{1}{2} = 10 \cdot \lg \left(\frac{1}{2} \right) \approx -3,01 \text{ dB}$$

berechnet.

Anmerkung: In der Übung wurde die Einhüllende - warum auch immer - normiert und mit $u(t) = A \cdot \sqrt{\frac{1}{T}}$ angegeben. Für das Verhältnis L ist das nicht weiter wichtig, die Symbol- und Bitenergien sind dann jedoch anders.

- b) Die Coderate R ist in diesem Fall $R = \frac{1}{2}$, da laut Aufgabenstellung die zusätzliche Übertragungskapazität zur Kanalcodierung verwendet wird. Bei der BPSK hat man $1 \frac{\text{bit}}{\text{Symbol}}$ und bei der QPSK hat man $2 \frac{\text{bit}}{\text{Symbol}}$ zur Verfügung.
- c) Es gilt

$$G = 10 \cdot \lg(R \cdot d_{\min}) \geq 3 \text{ dB}$$

$$R \cdot d_{\min} \geq 2$$

$$d_{\min} \geq \frac{2}{R} = 4$$

$$n - k + 1 \geq 4 \text{ mit } R = \frac{k}{n} = \frac{1}{2} \rightarrow k = \frac{n}{2}$$

$$n - \frac{n}{2} \geq 3$$

$$n \geq 6$$

Aufgabe 16

- a) Um die Nutzsymboldauer T_N anzugeben, muss zuerst die Dauer T_d der Symbole berechnet werden. Dies erfolgt über die Datenrate $R_d = 2 \text{ MBit/s}$.

$$T_d = \frac{1}{R_d} = 0,5 \text{ } \mu\text{s}$$

Mit [NTJon, Gleichung (7.7-1), S. 83] folgt

$$T_N = N \cdot T_d = 48 \cdot 0,5 \text{ } \mu\text{s} = 24 \text{ } \mu\text{s}$$

Der Unterträgerabstand ist durch [NTJon, Gleichung (7.7-2), S. 84] gegeben

$$\Delta f = \frac{1}{T_N} \approx 41,67 \text{ kHz}$$

Und für die Gesamtbandbreite

$$B_S = N \cdot \Delta f = 2 \text{ MHz}$$

- b) Die Länge des Schutzintervalls ist durch [NTJon, Gleichung (7.7-7), S. 86] gegeben

$$L_G \geq \left\lceil \frac{\tau_{\max} \cdot N}{T_N} \right\rceil = \lceil 3,2 \rceil = 4$$

somit muss das OFDM-Symbol um 4 Symbole erweitert werden. Die Länge des Schutzintervalls - wird für den nächsten Aufgabenteil benötigt - lässt sich über die Dauer eines Symbols zu

$$T_G = 4 \cdot T_d = 2 \mu\text{s}$$

berechnen.

- c) Da der Übertragungskanal über die Dauer der Übertragung eines OFDM-Symbols als zeitinvarianter Kanal angesehen wird, sollte die Dauer eines OFDM-Symbols kürzer als die Koheränzzeit τ_K des Kanals sein. (Siehe [NTJon, zweiter Abschnitt Kapitel 7.7, S. 83])

Mit [NTJon, Gleichung (7.7-6), S. 86] folgt daraus

$$\tau_K \geq T_S = T_N + T_G = 24 \mu\text{s} + 2 \mu\text{s} = 26 \mu\text{s}$$

Zur Umrechnung der Einheit MBit siehe auch die Wiederholung am Anfang des Dokuments.

Übungsblatt 5

Aufgabe 17

Bei der Dichte der Störung

$$f_N(n_k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-n_k^2}$$

handelt es sich um eine $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$ -Verteilung, wie man leicht anhand der Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

sieht.

Für das ML- bzw. das MAP-Kriterium wird die bedingte Dichte $f_{R|X}(r_k|x_k)$ benötigt. Es gilt

$$f_{R|X}(r_k|x_k) = f_{N|X}(r_k - x_k|x_k) = f_N(r_k - x_k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-(r_k - x_k)^2}$$

Die bedingte Dichte gibt das Empfangene r_k unter der Bedienung des Gesendeten x_k an. Die erste Umformung gibt nun die Störung (da $n_k = r_k - x_k$ gilt) unter der Bedingung des Gesendeten an, da die Störung jedoch nicht vom Gesendeten abhängt, kann diese im zweiten Schritt vernachlässigt werden.

Es kann entweder eine 1 oder eine -1 gesendet werden, das lässt sich an $f_X(x_k)$ ablesen: $x_k \in \{-1, 1\}$

- a) Beim Maximum Likelihood-Kriterium müssen alle Symbole gleichwahrscheinlich sein, siehe dazu auch [NTJon, Kapitel 8.2, S. 97 unten]. Dies führt zur neuen Dichte des Sendeprozesses

$$f_X(x_k) = \frac{1}{2} \cdot \delta(x_k - 1) + \frac{1}{2} \cdot \delta(x_k + 1)$$

Bei ML entscheidet man sich für das Symbol, das den größten Wert bei der Dichtefunktion liefert, siehe [NTJon, Gleichung (8.2-3), S. 98].

$$f_{R|X}(0,15|1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-(0,15-1)^2} \approx 0,2739$$

und

$$f_{R|X}(0,15|-1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-(0,15+1)^2} \approx 0,1503$$

Es wird somit auf $x_0 = 1$ entschieden.

Eine Alternative wäre das Zeichnen der beiden Dichtefunktionen - siehe Abbildung 13 auf Seite 37 - und anschließend das Betrachten und Vergleichen der Werte.

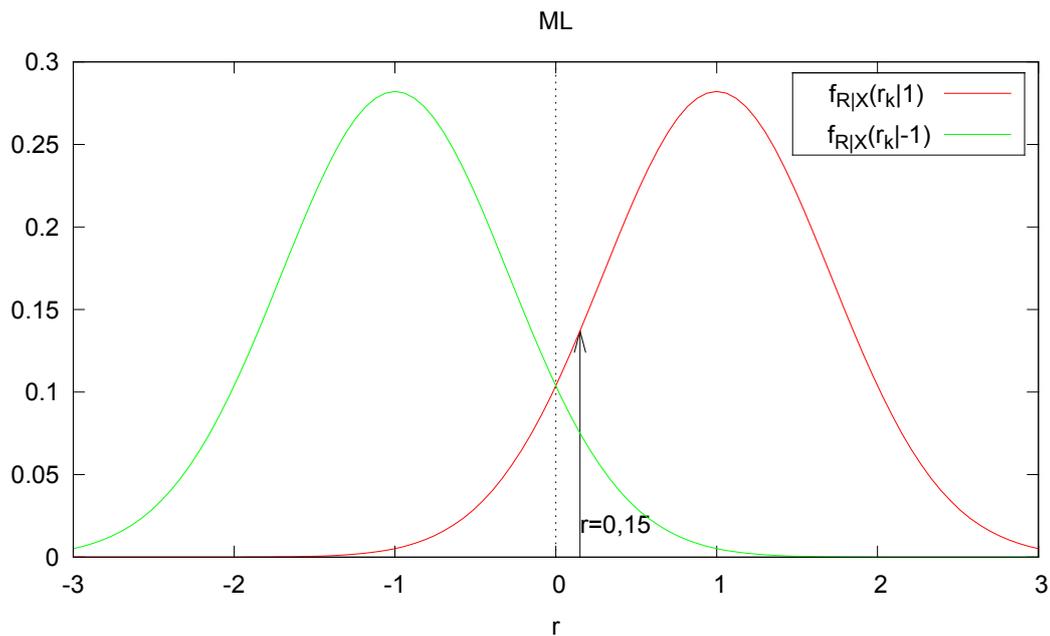


Abbildung 13: Bedingte Dichtefunktionen bei dem ML-Kriterium

- b) Beim Maximum a posteriori-Kriterium müssen die Symbole nicht gleichwahrscheinlich sein, es wird mit der gegebenen Dichte des Sendeprozesses

$$f_X(x_k) = \frac{1}{3} \cdot \delta(x_k - 1) + \frac{2}{3} \cdot \delta(x_k + 1)$$

gerechnet. In [NTJon, Gleichung (8.2-2), S. 97]

$$P(s_n(t)|r(t)) = \frac{P(s_n(t)) \cdot f(r(t)|s_n(t))}{f(r(t))}$$

wird mit $P(s_n(t))$ auch die Symbolwahrscheinlichkeit beachtet. Da $f(r(t))$ nicht von n abhängt, kann man nur den oberen Teil des Bruchs betrachten (vgl. [NTJon, S. 97 ganz unten]).

Es ergibt sich für die beiden möglichen gesendeten Symbole

$$P(x_0 = 1|r_0 = 0,15) \sim \frac{1}{3} \cdot f_{R|X}(0,15|1) \approx 0,0913$$

und

$$P(x_0 = -1|r_0 = 0,15) \sim \frac{2}{3} \cdot f_{R|X}(0,15|-1) \approx 0,1002$$

Hier wird nun auf das Symbol $x_0 = -1$ entschieden.

Auch hier wäre erneut eine grafische Lösung möglich, siehe dazu Abbildung 14

auf Seite 38.

Anmerkung: Bei dieser Aufgabe ging es um das Verständnis der beiden Kriterien ML und MAP. Dass man hier natürlich die beiden Ergebnisse nicht vergleichen kann, ist klar.

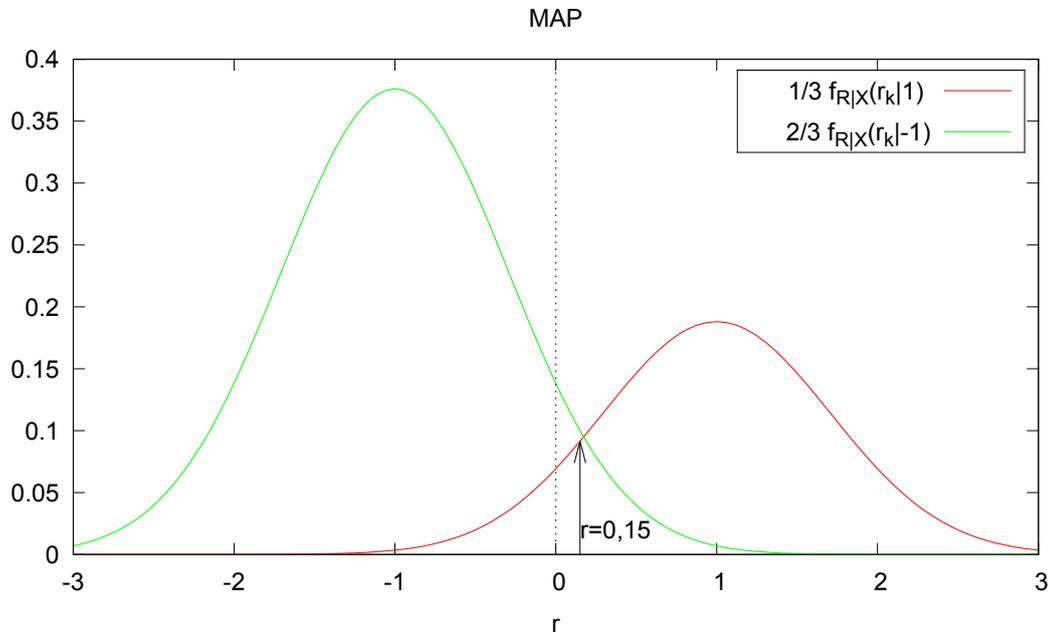


Abbildung 14: Bedingte Dichtefunktionen bei dem MAP-Kriterium

Aufgabe 18

- a) *Anmerkung: Dieser Aufgabenteil wurde zum größten Teil bereits im Buch behandelt, siehe dazu die [NTJon, Berechnung auf S. 102f].*

Da ein Schwellwertdetektor verwendet wird - der mit dem Vorzeichen arbeitet -, wird auf ein Signal geschlossen, sobald r positiv oder negativ ist. Mit der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit - siehe [WTKun, Satz 4.4, S. 9] - lässt sich P_B berechnen.

$$\begin{aligned} P_B &= \sum_{n=1}^N P(A_n) \cdot P(B|A_n) \\ &= P(d_k = -1) \cdot P(r > 0 | d_k = -1) + P(d_k = 1) \cdot P(r < 0 | d_k = 1) \end{aligned}$$

Da die Symbole gleichwahrscheinlich sind, folgt

$$P_B = \frac{1}{2} \cdot P(r > 0 | d_k = -1) + \frac{1}{2} \cdot P(r < 0 | d_k = 1)$$

zudem lässt sich noch die Symmetrie ausnutzen, sodass

$$P_B = P(r > 0 | d_k = -1)$$

gilt. Nun folgt die Berechnung über die Dichtefunktion

$$\begin{aligned} P_B &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2} \frac{(r-d_k)^2}{\sigma^2}} dr = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2} \frac{(r+1)^2}{\sigma^2}} dr \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Subst.: } u = \frac{r+1}{\sigma} \\ \frac{du}{dr} = \frac{1}{\sigma} \rightarrow du = \frac{dr}{\sigma} \\ 0 \rightarrow \infty \rightarrow \frac{1}{\sigma} \rightarrow \infty \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{1}{\sigma}}^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du \stackrel{\sigma^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{\sigma} = 2}{=} Q(2) = 1 - \Phi(2) \\ &\approx 0,02275 \end{aligned}$$

Für das Signal-zu-Rausch-Verhältnis gilt nach [NTJon, Definition (B-1), S. 222]

$$SNR = \frac{S}{N}$$

die Berechnung erfolgt über die mittlere Leistung \bar{P} (siehe auch die Wiederholung im ersten Kapitel)

$$SNR = \frac{S}{N} = \frac{\bar{P}_S}{\bar{P}_N} = \frac{E\{|D_k|^2\}}{E\{|N_k|^2\}} = \frac{1}{0,25} = 4 \hat{=} 10 \cdot \lg(4) \approx 6,02 \text{ dB}$$

$E\{|D_k|^2\}$ ist 1, $E\{|N_k|^2\}$ lässt sich umschreiben zu

$$E\{|N_k|^2\} = E\{(N_k - \mu)^2\} = \text{Var}(N_k) = 0,25$$

da weißes Gaußsches Rauschen mittelwertfrei ist, siehe zum Beispiel [WTKun, die Bemerkung auf S. 33].

- b) Das Signalmodell mit der zusätzlichen Störung ist in Abbildung 15 auf Seite 40 zu sehen.

Damit gilt für das empfangene Signal mit dem Störsignal s_k

$$r_k = d_k + n_k + \underbrace{\frac{1}{2}d_{k-1}}_{=:s_k}$$

Eine Rechenvorschrift für die Dichte unabhängiger Zufallsvariablen findet sich in [WTJon, Satz 7.4-1, S. 116]

Die Dichte der Summe $Z = X + Y$ zweier unabhängiger Zufallsvariablen X und Y ist die Faltung der Einzeldichten.

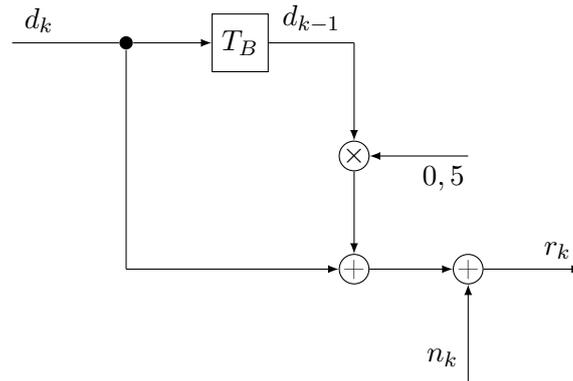


Abbildung 15: Signalmodell mit der zusätzlichen Störung.

Die Dichte für das Gaußsche Rauschen bleibt identisch,

$$f(n_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{n_k^2}{2\sigma^2}}$$

für die Störung durch den zusätzlichen Ausbreitungsweg gilt folgende Dichte

$$\frac{1}{2} \cdot \delta\left(s_k - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \delta\left(s_k + \frac{1}{2}\right)$$

Durch die Dämpfung um den Faktor $a = 0,5$ verschiebt sich die Dichte, dies wird durch das rote $\frac{1}{2}$ realisiert. Da eine Gleichverteilung vorliegt, ist der blaue Faktor $\frac{1}{2}$ für die gleiche Auftretenswahrscheinlichkeit vorhanden.

Nun werden die Dichtefunktionen der beiden Störungen nach dem erwähnten Satz gefaltet. Somit gilt für Verteilungsdichte

$$\begin{aligned} f(s_k) &= \left[\frac{1}{2} \cdot \delta\left(s_k - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \delta\left(s_k + \frac{1}{2}\right) \right] * \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{n_k^2}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[e^{-\frac{1}{2} \frac{(s_k - \frac{1}{2})^2}{\sigma^2}} + e^{-\frac{1}{2} \frac{(s_k + \frac{1}{2})^2}{\sigma^2}} \right] \end{aligned}$$

c) Die Berechnungen sind analog zum Aufgabenteil a), somit hier ohne weitere Erklä-

rungen

$$\begin{aligned}
 P_B &= P(r > 0 | d_{k=-1}) \\
 &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[e^{-\frac{1}{2} \frac{(r-(s_k-\frac{1}{2}))^2}{\sigma^2}} + e^{-\frac{1}{2} \frac{(r-(s_k+\frac{1}{2}))^2}{\sigma^2}} \right] dr \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2} \frac{(r+1,5)^2}{\sigma^2}} + e^{-\frac{1}{2} \frac{(r+0,5)^2}{\sigma^2}} dr \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Subst.: } u = \frac{r+1,5}{\sigma} \\ \frac{du}{dr} = \frac{1}{\sigma} \rightarrow du = \frac{dr}{\sigma} \\ 0 \rightarrow \infty \rightarrow \frac{1,5}{\sigma} \rightarrow \infty \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Subst.: } a = \frac{r+0,5}{\sigma} \\ \frac{da}{dr} = \frac{1}{\sigma} \rightarrow da = \frac{dr}{\sigma} \\ 0 \rightarrow \infty \rightarrow \frac{0,5}{\sigma} \rightarrow \infty \end{array} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{1,5}{\sigma}}^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{0,5}{\sigma}}^\infty e^{-\frac{a^2}{2}} da \\
 &= \frac{1}{2} \cdot [1 - \Phi(3) + 1 - \Phi(1)] \approx 0,08000
 \end{aligned}$$

Für das Signal-zu-Rausch-Verhältnis gilt

$$SNR = \frac{S}{N} = \frac{E\{|D_k|^2\}}{E\{|S_k|^2\}} = \frac{1}{0,5} = 2 = 10 \cdot \lg(2) \approx 3,01 \text{ dB}$$

wobei für die Störung mit den Rechenregeln für den Erwartungswert gilt - siehe das erste Kapitel zur Wiederholung

$$\begin{aligned}
 E\{|S_k|^2\} &= E\left\{\left|n_k + \frac{1}{2}d_{k-1}\right|^2\right\} = \underbrace{E\{|n_k|^2\}}_{=0,25} + \underbrace{E\{|n_k d_{k-1}|^2\}}_{=0} + \frac{1}{4} \cdot \underbrace{E\{|d_{k-1}|^2\}}_{=1} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 19

a) Nach dem Mischen gilt für das Sendesignal

$$\tilde{s}(t) = s(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

und wird zum Empfangssignal

$$r(t) = \tilde{s}(t) \cdot 2 \cdot \cos(2\pi f_c t + \varphi_0) = 2 \cdot s(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) \cdot \cos(2\pi f_c t + \varphi_0)$$

mit dem Additionstheorem

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \cdot [\cos(x - y) + \cos(x + y)]$$

folgt

$$r(t) = s(t) \cdot [\cos(\varphi_0) + \cos(4\pi f_c t + \varphi_0)]$$

wobei durch den Tiefpass der hochfrequente Teil herausgefiltert wird

$$r(t) = s(t) \cdot \cos(\varphi_0)$$

Nun können die drei Fälle diskutiert werden

- (I) $\varphi_0 = \pi$
 $r(t) = -s(t)$, die Sendebitfolg wird invertiert
- (II) $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$
 $r(t) = 0$, kein Signal vorhanden
- (III) φ_0 beliebig
Das Empfangssignal wird gedämpft und für $\varphi_0 \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$ tritt zusätzlich eine Bitinversion auf.
- b) Die Vorschriften für die Modulation und Demodulation stehen in der Aufgabe, hier die fertige Tabelle 5 auf Seite 42.

Da ein störungsfreier Kanal vorliegt, gilt $\tilde{r}_n = \tilde{d}_n$. Die blauen Empfangseinträge sind für einer Trägerphase von $\varphi_0 = 0$ und die Roten für $\varphi_0 = \pi$ berechnet.

n	d_n	\tilde{d}_n	\tilde{r}_n	r_n	\tilde{r}_n	r_n
-1	-	1	1	-	-1	-
0	1	1	1	1	-1	1
1	1	1	1	1	-1	1
2	1	1	1	1	-1	1
3	1	1	1	1	-1	1
4	-1	-1	-1	-1	1	-1
5	-1	1	1	-1	-1	-1
6	1	1	1	1	-1	1
7	1	1	1	1	-1	1
8	1	1	1	1	-1	1

Tabelle 5: Modulation und Demodulation der gegebenen Symbolfolge.

Übungsblatt 6

Aufgabe 20

Das in der Aufgabenstellung gezeigte Übertragungssystem ist das physikalische Modell, zu sehen in Abbildung 16 auf Seite 43.

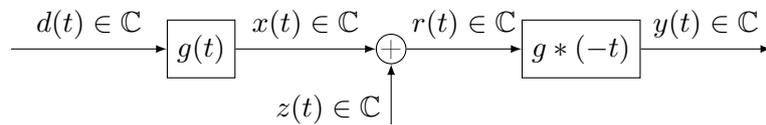


Abbildung 16: Das physikalische Übertragungsmodell.

In dieser Aufgabe werden diskrete Werte verwendet, weswegen folgende Schreibweise verwendet werden wird

$$d_k = d(t_k T_S)$$

Das logische, filterfreie Modell ist in Abbildung 17 auf Seite 43 zu sehen. Hier wird ausgenutzt, dass sich die Filterwirkung wieder aufhebt, bis auf die Störung. Somit lässt sich schreiben

$$y_k = d_k + z_{g,k} = d_k + n_k$$

wobei das g für *gefiltert* steht.

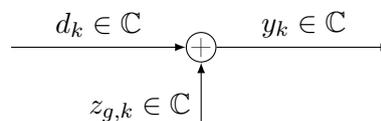


Abbildung 17: Das logische, filterfreie Übertragungsmodell.

Die Störung $z(t)$ ist komplex, weiß und Gaußförmig, im Allgemeinen bandunbegrenzt. Durch die Filterung entsteht jedoch eine Bandbegrenzung.

Für das Filter $g(t)$ gilt, da es achsensymmetrisch und reel ist

$$g(t) = g^*(-t)$$

Die Übertragungsfunktion lässt sich nach einer Umformung mit Hilfe einer Korrespondenztabelle angeben

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{B}} \cdot B \cdot \frac{\sin \pi B t}{\pi B t} \circ \bullet G(f) = \frac{1}{\sqrt{B}} \cdot \text{rect}_B(f)$$

Für die Rechteckfunktion gibt es mehrere Schreibweisen, um Konform mit der gewohnten Darstellung aus *Signale und System* zu bleiben, wird folgende Schreibweise verwendet

$$\text{rect}_B(f) = \begin{cases} 1 & \text{für } |f| \leq \frac{B}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Durch Quadrieren folgt

$$|G(f)|^2 = \frac{1}{B} \cdot \text{rect}_B(f)$$

Das Signal $y(t)$ setzt sich aus dem Nutzsinal und der Störung zusammen

$$y(t) = r(t) * g^*(-t) = [x(t) + z(t)] * g^*(-t) = y_s(t) + y_n(t)$$

Zuerst wird das Nutzsinal berechnet

$$\begin{aligned} y_s &= x(t) * g^*(-t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \cdot g(t - nT_S) * g^*(-t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \cdot \mathcal{F} \left\{ G(f) \cdot e^{-j2\pi f n T_S} \cdot G^*(f) \right\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \cdot \mathcal{F} \left\{ |G(f)|^2 \cdot e^{-j2\pi f n T_S} \right\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \cdot \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{B} \cdot \text{rect}_B(f) \cdot e^{-j2\pi f n T_S} \right\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \cdot \frac{1}{B} \cdot B \cdot \frac{\sin[\pi B(t - nT_S)]}{\pi B(t - nT_S)} \end{aligned}$$

Für die Nutzsignalleistung gilt

$$\begin{aligned}
\bar{P} &= E \{ y_s(t) \cdot y_s^*(t) \} \Big|_{t=kT_S} \\
&= E \left\{ \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \cdot \frac{\sin[\pi B(t - nT_S)]}{\pi B(t - nT_S)} \right) \cdot \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m \cdot \frac{\sin[\pi B(t - mT_S)]}{\pi B(t - mT_S)} \right)^* \right\} \Big|_{t=kT_S} \\
&= E \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_n \cdot d_m^* \cdot \frac{\sin[\pi B(t - nT_S)]}{\pi B(t - nT_S)} \cdot \frac{\sin[\pi B(t - mT_S)]}{\pi B(t - mT_S)} \right\} \Big|_{t=kT_S} \\
&= E \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_n \cdot d_m^* \cdot \underbrace{\frac{\sin[\pi B(k - n)T_S]}{\pi B(k - n)T_S} \cdot \frac{\sin[\pi B(k - m)T_S]}{\pi B(k - m)T_S}}_{=0 \forall (k-n) \neq (k-m)} \right\} \\
&\stackrel{n=m}{=} E \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \cdot d_n^* \cdot \underbrace{\left[\frac{\sin[\pi B(k - n)T_S]}{\pi B(k - n)T_S} \right]^2}_{=1 \text{ für } k=n} \right\} \\
&= E \{ |d_n|^2 \} = 1
\end{aligned}$$

Anmerkungen zu den Rechenschritten:

- (I) Da der $\frac{\sin x}{x}$ -Term keine komplexen Teile hat, lässt sich die komplexe Konjugation auf das d_m ziehen.
- (II) Dass die beiden $\frac{\sin \pi x}{\pi x}$ -Terme für unterschiedliche Argumente zu Null werden, kann man sich entweder überlegen oder man lässt sich zwei verschobenen $\frac{\sin \pi x}{\pi x}$ -Funktionen zeichnen. Dann sieht man deutlich, dass diese zu Null werden, zu sehen in Abbildung 18 auf Seite 46.
- (III) In der selben Abbildung sieht man auch, dass die sinc-Funktion nur bei Null = 1 wird und bei allen weiteren Vielfachen von π zu Null wird.
- (IV) Der letzte Schritt erfolgt über die Angabe in der Aufgabenstellung.

Für die Störung gilt mit [NTJon, Gleichung 1.4-4, S. 9]

$$\Phi_{Z_g Z_g} = |G(f)|^2 \cdot \Phi_{ZZ}(f)$$

was in Abbildung 19 auf Seite 46 zu sehen ist.

Damit lässt sich die Rauschleistung berechnen

$$\begin{aligned}
\bar{P}_N &= E \{ (z(t) * g(t)) \cdot (z(t) * g(t))^* \} = E \{ z_g(t) \cdot z_g(t)^* \} \\
&= \varphi_{z_g z_g}(0) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ |G(f)|^2 \cdot \Phi_{ZZ}(f) \right\} = \frac{1}{B} \cdot B \cdot \frac{\sin(\pi B \tau)}{\pi B \tau} \cdot N_0 \Big|_{\tau=0} \\
&= N_0
\end{aligned}$$

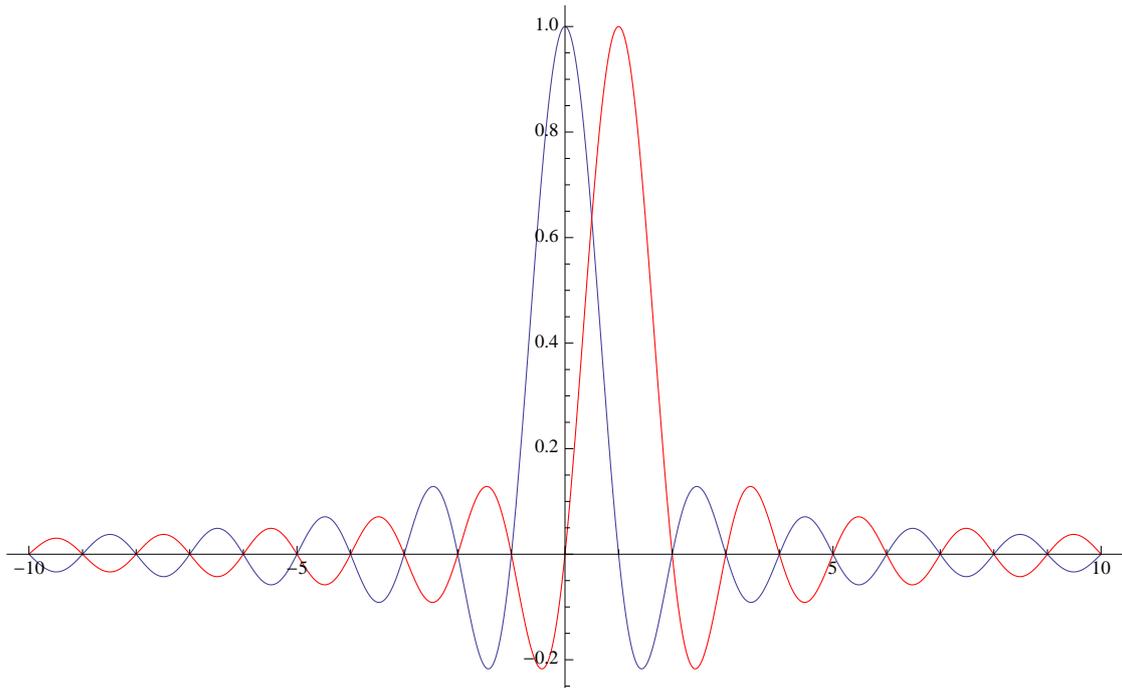


Abbildung 18: Zwei verschobene sinc-Funktionen.

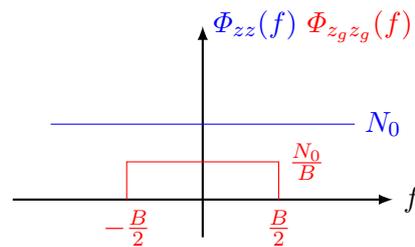


Abbildung 19: Leistungsdichtespektrum der Störung.

Damit lässt sich das gesuchte Signal-zu-Rausch-Verhältnis angeben

$$SNR|_{t=kT_S} = \frac{\bar{P}_S}{\bar{P}_N} = \frac{1}{N_0}$$

Aufgabe 21

- a) Das Modell ist in Abbildung 20 auf Seite 47 zu sehen.
- b) Das Empfangssignal kann entweder grafisch erstellt werden, siehe dazu Abbildung 21 auf Seite 48, oder lässt sich auch berechnen und anschließend zeichnen. Hat man

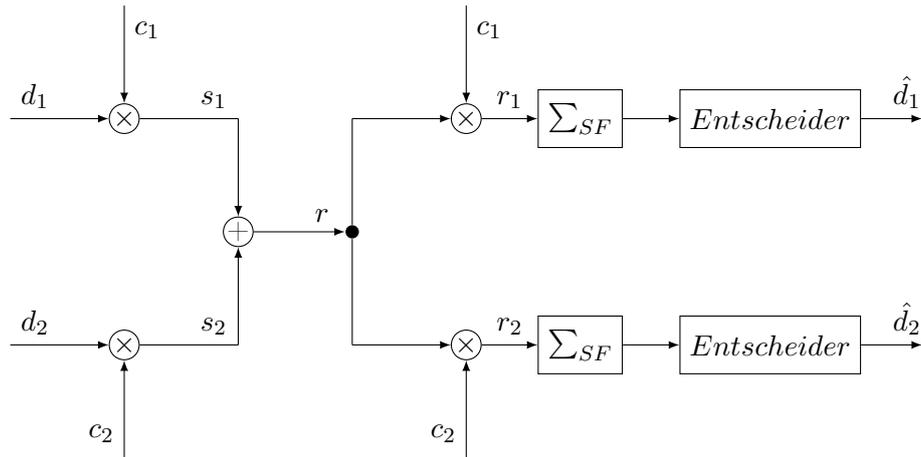


Abbildung 20: Modell für das Empfangssignal samt Arbeitsschritte im Empfänger.

das Prinzip einmal verstanden, ist die Rechnung sicher schneller.

s_1	+ 1	+ 1	- 1	- 1	+ 1	+ 1	- 1	- 1
s_2	+ 1	- 1	- 1	+ 1	- 1	+ 1	+ 1	- 1
r	+ 2	0	- 2	0	0	+ 2	0	- 2

- c) Die grafische Entspreizung ist in Abbildung 21 auf Seite 48 enthalten, auch hier wäre eine Rechnung möglich. Das empfangene Signal r wird nun noch mit der jeweiligen Signatur c multipliziert, was zunächst auf r_1 , bzw. r_2 führt. Anschließend werden die beiden zusammenhörigen Werte addiert und anschließend gemittelt.

r_1	$2 \cdot 1$	$0 \cdot 1$	$-2 \cdot 1$	$0 \cdot 1$	$0 \cdot 1$	$2 \cdot 1$	$0 \cdot 1$	$-2 \cdot 1$
\sum	2		-2		2		-2	
Ent.	1		-1		1		-1	
r_2	$2 \cdot 1$	$0 \cdot (-1)$	$-2 \cdot 1$	$0 \cdot (-1)$	$0 \cdot 1$	$2 \cdot (-1)$	$0 \cdot 1$	$-2 \cdot (-1)$
\sum	2		-2		-2		2	
Ent.	1		-1		-1		1	

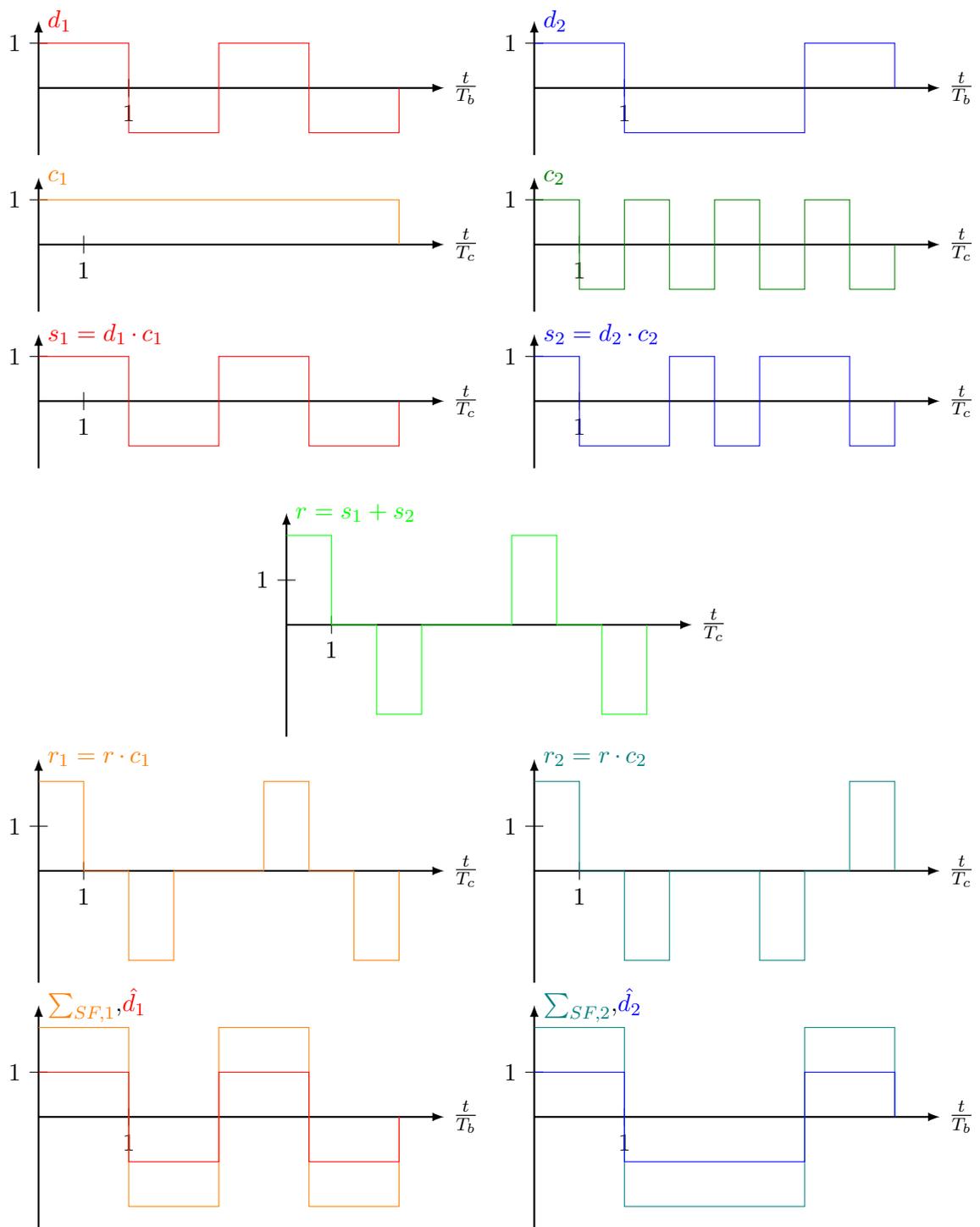


Abbildung 21: Sendesignal.

Literatur

- [NTJon] Friedrich Jondral *Nachrichtensysteme - Grundlagen - Verfahren - Anwendungen*
3. Auflage J. Schlembach Fachverlag, Wilburgstetten 2008
- [SuSKie] Uwe Kiencke, Holger Jäkel *Signale und Systeme*
4. Auflage Oldenbourg, 2008
- [WTJon] Friedrich Jondral, Anne Wiesler *Wahrscheinlichkeitsrechnung und stochastische Prozesse - Grundlagen für Ingenieure und Naturwissenschaftler*
2. Auflage B.G. Teubner, Stuttgart / Leipzig / Wiesbaden Mai 2002
- [WTKun] Peer Christian Kunstmann *Wahrscheinlichkeitstheorie für die Fachrichtung Elektroingenieurwesen WS 2009/10*
abgerufen am 21. April 2010
<http://www.math.kit.edu/iana3/lehre/wtetech2009w/media/wtet-zsf.pdf>
- [GkGo] Dr. Gunter Ochs *Folien zum Galoiskörper der Hochschule Darmstadt*
abgerufen am 15. Juni 2010
<http://www.fbmn.h-da.de/~ochs/pdf/mathe1/galois09.pdf>
- [wiki-bit] o.A *Artikel zum Begriff Bit aus der Wikipedia*
abgerufen am 05. Juli 2010
<http://de.wikipedia.org/wiki/Bit>
- [wiki-log] o.A *Artikel zum Logarithmus aus der Wikipedia*
abgerufen am 05. Mai 2010
<http://de.wikipedia.org/wiki/Logarithmus>